Stage de recherche de Master 2.

Processus de diffusion sur une variété. Transport parallèle stochastique et transport parallèle déformé.

Baptiste Huguet
École Normale Superieure de Rennes & Université de Bordeaux 1

Encadrants : Marc Arnaudon et Michel Bonnefont

Avril-Juillet 2017

Table des matières

Introduction

Ce rapport à pour but de rendre compte de mon travail au cours de mon stage de recherche de Master 2. Il présente les bases de l'étude des semi-martingales et des processus de diffusion sur une variété. Le but était de se familiariser avec ces notions et de découvrir les outils classiques associés notamment le relèvement horizontal et les transports stochastiques.

Dans une première partie, nous définirons les termes de bases de notre étude : semi-martingale et vecteur horizontal. Dans un second temps, nous définirons le relèvement horizontal stochastique. Puis nous introduiront les processus de diffusion. Pour finir, nous présenterons le transport parallèle stochastique et le transport parallèle déformé au dessus d'un processus de diffusion.

Notation

Dans ce rapport, M désignera une variété (différentielle) de dimension d. Toutes les variables aléatoires seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_*, \mathbb{P})$ muni d'une filtration satisfaisant aux conditions habituelles.

1 Notions de bases

1.1 Semi-martingale sur une variété

Pour commencer, nous devons définir ce qu'est une semi-martingale sur une variété. Considérons une semi-martingale, X, dans $\mathbb{R}^d$. D'après la formule d'Itô, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2$, le processus $f(X)$ est une semi-martingale. C'est cette propriété qui va caractériser les semi-martingales sur les variétés.

Définition 1.1. *Soit τ un $\mathcal{F}_*$-temps d'arrêt. Un processus X, défini sur $[0, \tau[$, continu, à valeurs dans M est une semi-martingale si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, le processus $f(X)$ est une semi-martingale réelle sur $[0, \tau[$.*

La formule d'Itô établit un lien fort entre l'étude des semi-martingales et les équations différentielles stochastiques. Soient $V_1, \ldots, V_l$ des champs de vecteurs lisses sur M, Z une semi-martingale dans $\mathbb{R}^l$ et X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, à valeurs dans M. On souhaite donner un sens à l'équation suivante :

$$\mathrm{d}X_t = V_\alpha(X_t) \circ \mathrm{d}Z^\alpha \tag{1}$$

Définition 1.2. *Une semi-martingale à valeurs dans M, définie sur $[0, \tau[$ est solution de l'équation (1) sur $[0, \tau[$ si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X_s) \circ \mathrm{d}Z_s^\alpha \ , \ 0 \le t \le \tau.$$

Dans le cadre vectoriel, on dispose de théorèmes d'existence et d'unicité pour les EDS. Les résultats sur les variétés s'en déduise grâce au théorème de plongement de Whitney. On a alors le résultat suivant.

Theorem 1.3. *Il existe une unique solution à l'équation (1) définie jusqu'à son temps d'explosion.*

1.2 Connexion et champs parallèles

A présent, nous supposerons que M est munie d'une connexion.

Définition 1.4. *Une connexion est une application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

telle que pour tout champ de vecteurs X, Y et Z et toute application lisse f et g, on ait :

- $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_x (fY) = f \nabla_X Y + X.fY$

Une connexion peut être décrite par les symboles de Christoffel. Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ une carte locale de M. L'espace vectoriel $T_x M$ est engendré par les champs de vecteurs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour tout x dans le domaine de la carte. On définit alors les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k par la relation suivante :

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k \quad .$$

Un connexion permet de définir le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe.

Définition 1.5. *Soit $(\gamma_t)_{t \ge 0}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ dans M et $(V_t)t \ge 0$ courbe $\mathcal{C}^1$ dans TM, au dessus de γ, ie $V_t \in T_{\gamma_t} M$. On dit que V est parallèle si l'on a :*

$$\nabla_{\dot{\gamma}_t} V_t = 0 \quad ,$$

et on dit alors que V_t est le transport parallèle de V_0 au dessus de γ.

En coordonnées locales, cela correspond au système différentielle suivant :

$$\dot{v}_t^k + \Gamma_{jl}^k(\gamma_t) \dot{\gamma}_t^j v_t^l = 0$$

où $V_t = v_t^i X_i$. Les théorèmes classiques sur les équations différentielles nous donne l'existence et l'unicité de champs parallèles au dessus d'une courbe $\mathcal{C}^1$.

Cette notion de champ parallèle permet de fixer une décomposition de $T_v TM$. Considérons $x \in M$ et $v \in T_x M$. Parmi les courbes dans TM passant par v, on peut distinguer celles qui restent dans la fibre $T_x M$. Ces courbes sont dites verticales et les vecteurs tangents associés forment un sous espace vectoriel de $T_v TM$, noté V_vTM. Ce sous-espace vectoriel possède de nombreux supplémentaires et l'on ne dispose pas de moyen "canonique" pour en choisir un. C'est là qu'intervient la connexion. Considérons le sous-espace vectoriel H_vTM des vecteurs tangents à une courbe, dans TM, parallèle le long de sa projection sur M. On a alors :

$$T_vTM = V_vTM \oplus H_vTM \ .$$

On note $\tilde{h}_w(v)$ l'unique vecteur tangent au transport parallèle de $w \in T_xM$ au dessus d'une courbe de vecteur tangent v.

Cette décomposition se traduit aussi sur le fibré des repères, $\mathcal{F}(M)$. Un repère est la donnée d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans T_xM. Si on se fixe au préalable une base de $\mathbb{R}^d$, c'est équivalent à la donnée d'une base de T_xM. La fibre de $\mathcal{F}(M)$ au dessus de x, $\mathcal{F}_x(M)$ est donc isomorphe à $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Soit u un repère au dessus de x. Un vecteur tangent de $T_u\mathcal{F}(M)$ est dit vertical s'il est tangent à une courbe contenue dans $\mathcal{F}_x(M)$. Une courbe (u_t) dans $\mathcal{F}(M)$ est dite horizontale si pour tout vecteur $e \in \mathbb{R}^d$ la courbe (u_te) est parallèle. Un vecteur tangent de $T_u\mathcal{F}(M)$ est dit horizontal s'il est tangent à une courbe horizontal. On a donc une décomposition :

$$T_u\mathcal{F}(m) = V_u\mathcal{F}(M) \oplus H_u\mathcal{F}(M) \ .$$

Les espaces vectoriels T_xM et $H_u\mathcal{F}(M)$ sont de même dimension. La projection $\pi : \mathcal{F}(M) \to M$ induit un isomorphisme $\pi_* : H_u\mathcal{F}(M) \to T_{\pi(u)}TM$. C'est la restriction de l'application tangente $\mathrm{d}\pi$. Soit $u \in \mathcal{F}(M)$ et $v \in T_{\pi(u)}M$, on notera $h_u(v)$ l'unique vecteur de $H_u\mathcal{F}(M)$ tel que $\pi_*(h_u(v)) = v$. C'est la réciproque de π_*. On a la relation :

$$h_u(v).e = \tilde{h}_{ue}(v).$$

Soit $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit $u \in \mathcal{F}(M)$, on définit les vecteurs $H_i(u) \in \mathbb{H}_u\mathcal{F}(M)$ par : $H_i(u) = h_u(ue_i)$. Les $(H_i(u))_i$ forment une base de $H_u\mathcal{F}(M)$.

Définition 1.6. *Étant donné une courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$, dans M et un repère $u \in \mathcal{F}(M)_{\pi(\gamma_0)}$, l'unique courbe parallèle u dans $\mathcal{F}(M)$ telle que $\pi(u) = \gamma$ et $u(0) = u_0$ est appelée le relèvement horizontal de γ partant de u_0.*

Dans ce cas, l'application linéaire $u_t \circ u_0^{-1} : T_{\gamma_0}M \to T_{\gamma_t}M$ est le transport parallèle le long de γ.

Dans le cas d'une variété riemannienne, munie de sa connexion de Levi-Civita, il devient plus pertinent d'étudier les repères orthonormés. On note $\mathcal{O}(M)$ l'ensemble des repères orthonormés. Une fibre $\mathcal{O}(M)_x$ est l'ensemble des isométries entre $\mathbb{R}^d$ et T_xM pour la métrique riemannienne. Dans ce cas, les $(H_i(u))_i$ appartiennent bien à $\mathcal{O}(M)_{\pi(u)}$ et forment un base orthonormée. Une propriété importante du transport parallèle, dans ce cadre, c'est son respect de la métrique.

Theorem 1.7. *Soit M un variété riemannienne munie de sa connexion de Levi-Civita. Le transport parallèle est une isométrie : soit γ une courbe $\mathcal{C}^1$ dans M et soient X_t et Y_t des champs de vecteurs parallèle au dessus de γ. Alors, pour tout t, on a :*

$$\langle X_t, Y_t \rangle = \langle X_0, Y_0 \rangle \ .$$

Démonstration. On travaille avec la connexion de Levi-Civita, ainsi, pour tout champs de vecteur X, Y et Z, on a :

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Soit γ une courbe $\mathcal{C}^1$ dans M et soient X_t et Y_t des champs de vecteurs parallèle au dessus de γ. Le champ X et étant parallèle, on a : $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ et de même pour Y. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle X_t, Y_t \rangle &= \nabla_{\dot{\gamma}_t} \langle X_t, Y_t \rangle \\
&= \langle \nabla_{\dot{\gamma}_t} X_t, Y_t \rangle + \langle X_t, \nabla_{\dot{\gamma}_t} Y_t \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Le relèvement horizontal permet de faire le lien entre une courbe dans M, donc difficile à étudier et une courbe vectorielle : son anti-développement.

Définition 1.8. *Soit γ une courbe $\mathcal{C}^1$ dans M et u son relèvement horizontal. L'anti-développement de γ (ou de u) est le processus vectoriel w tel que :*

$$w_t = \int_0^t u_s^{-1} \dot{\gamma}_s \mathrm{d}s, \forall t \geq 0.$$

En utilisant la base $(H_i(u))_i$, on a :

$$\dot{u}_t = H_i(u_t) \dot{w}_t^i \tag{2}$$

.

2 Relèvement horizontal stochastique

Dorénavant, on supposera que M est une variété riemannienne, munie de sa connexion de Levi-Civita. On notera $\langle , \rangle$ la métrique riemannienne. Le but de cette section est d'étendre les notions de relèvement horizontal et d'anti-développement aux semi-martingales. L'idée est d'adapter l'équation (2) au calcul stochastique. C'est une manipulation naturelle grâce au principe de transfert de Stratonovich : on peut remplacer la différentielle d'un processus $\mathcal{C}^1$ par la différentielle de Stratonovich d'une semi-martingale. Cela peut s'expliquer par le fait que les solutions d'EDS au sens de Stratonovich peuvent être vu comme limite en probabilité de solutions d'équations différentielles ordinaires. On considère l'EDS suivante, dans le fibré des repères :

$$\circ \, \mathrm{d}U_t = H_\alpha(U_t) \circ \mathrm{d}Z_t^\alpha \tag{3}$$

où Z est une semi-martingale dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1. *i) Une semi-martingale U dans $\mathcal{F}(M)$ est dite horizontale s'il existe une semi-martingale Z dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant (3). Une semi-martingale convenable est appelée l'anti-développement de U (ou de sa projection $X = \pi(U)$).*

ii) Soient Z une semi-martingale dans $\mathbb{R}^d$ et U_0 une variable aléatoire dans $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}_0$-mesurable. La solution U de (3) est appelée le développement (stochastique) de Z dans $\mathcal{F}(M)$. Sa projection $X = \pi(U)$ est appelée le développement (stochastique) de Z dans M.

iii) Soit X une semi-martingale dans M. Une semi-martingale horizontale U, telle que $X = \pi(U)$, est appelée relèvement horizontal de X.

Des liens entre X, U et Z, seuls $X \to U$ et $U \to Z$ nécessitent quelques explications. Cependant nous ne donnerons pas tous les détails des constructions et ce pour une raison. Une semi-martingale sur une variété est un objet complexe, la caractérisation donnée par sa définition est assez contraignante alors que l'étude des semi-martingale vectorielle est assez simple. Le mouvement naturel est donc de partir d'une semi-martingale vectoriel et de construire son développement en résolvant une EDS. On obtiens alors une semi-martingale à valeurs dans la variété. Nonobstant, il est bon de savoir que cette construction peut être remontée. On notera $P_\alpha^* = h(P_\alpha)$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, bend left, "\circ \mathrm{d}U_t = H_\alpha(U_t) \circ \mathrm{d}Z_t^\alpha"] \\
U \arrow[u, bend left, "\circ \mathrm{d}Z_t = U^{-1} P_\alpha(X_t) \circ \mathrm{d}X_t^\alpha"] \arrow[d, bend left, "X = \pi(U)"] \\
X \arrow[u, bend left, "\circ \mathrm{d}U_t = P_\alpha^*(U_t) \circ \mathrm{d}X_t^\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Etant donné l'un de ses trois objets, les deux autres sont donc définis de manière unique (modulo un choix de condition initiale).

Par le principe de transfert de Stratonovich, le relèvement horizontal préserve la métrique.

Proposition 2.2. *Soit x une semi-martingale dans M. Soit $U_0 \in \mathcal{O}(M)$ et U le relèvement horizontal de X partant de U_0, alors pour tout t, $U_t \in \mathcal{O}(M)$.*

Le relèvement horizontal et l'anti-développement sont des outils très utiles dans l'étude des semi-martingales. Ils permettent par exemple de définir la variation quadratique.

Définition 2.3. *Soit X un semi-martingale dans M. On note U et Z son relèvement horizontal et son anti-développement, respectivement. Soit h un $(0,2)$-tenseur. La h-variation quadratique de X, noté $\int h(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$ est :*

$$\int_0^t h(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) = \int_0^t h(U_s e_i, U_s e_j) \mathrm{d}\langle Z^i, Z^j \rangle_s.$$

L'exemple le plus courant est la variation quadratique liée à une hessienne. Nous verrons avec le lemme 3.6 que l'on a :

$$\int_0^t \nabla^2 f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) = \int_0^t H_i H_j \tilde{f}(U_s) \mathrm{d}\langle Z^i, Z^j \rangle_s,$$

où $\tilde{f} = f \circ \pi$.

Le relèvement horizontal et l'anti-développement permettent aussi de définir ce qu'est une martingale dans une variété.

Définition 2.4. *Une semi-martingale dans M est une ∇-martingale si son anti-développement est une martingale locale dans $\mathbb{R}^d$.*

On remarque que la notion de semi-martingale est indépendante de toute connexion mais que le relèvement horizontal et donc l'anti-développement et la notion de martingale dépendent de la connexion que l'on choisit sur M, ou, dans le cadre des variétés riemannienne, du choix de métrique sur M. On peut aussi caractériser les martingales par leur variation quadratique.

Proposition 2.5. *Une semi-martingale X dans M est une ∇-martingale si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, le processus*

$$N^f(X)_t \stackrel{def}{=} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^2 f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)$$

est une martingale locale réelle.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\tilde{f} = f \circ \pi$. On a :

$$\tilde{f}(U_t) - \tilde{f}(U_0) = \int_0^t \left\langle \mathrm{d}\tilde{f}(U_s), \circ \mathrm{d}U_s \right\rangle$$

Or on sait que $\circ \mathrm{d}U_t = h_{U_t}(U_t \circ \mathrm{d}Z_t)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = \tilde{f}(U_t) - \tilde{f}(U_0) \qquad\qquad & = \int_0^t \left\langle \mathrm{d}\tilde{f}(U_s), h_{U_s}(U_s \circ \mathrm{d}Z_s) \right\rangle \\ = \int_0^t \left\langle \mathrm{d}\tilde{f}(U_s), h_{U_s}(U_s^\alpha \circ \mathrm{d}Z_s^\alpha) \right\rangle & \\ = \int_0^t \left\langle \mathrm{d}\tilde{f}(U_s), h_{U_s}(U_s^\alpha) \circ \mathrm{d}Z_s^\alpha \right\rangle & \\ = \int_0^t \left\langle \mathrm{d}\tilde{f}(U_s), H_\alpha(U_s) \circ \mathrm{d}Z_s^\alpha \right\rangle & \\ = \int_0^t H_\alpha \tilde{f}(U_s) \circ \mathrm{d}Z_s^\alpha & \end{aligned}$$

Pour faire apparaître la partie martingale locale et la partie à variation finie, on va maintenant utiliser la notation d'Itô. On a :

$$\mathrm{d}\tilde{f}(U_t) = H_\alpha \tilde{f}(U_s)\mathrm{d}Z_s^\alpha + \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{d}H_\alpha \tilde{f}(U_.), \mathrm{d}Z^\alpha \right\rangle_t.$$

En appliquant cette formule à la fonction $H_\alpha \tilde{f}$, on a :

$$\mathrm{d}H_\alpha \tilde{f}(U_t) = \sum_\beta H_\beta H_\alpha \tilde{f}(U_s)\mathrm{d}Z_s^\beta + \mathrm{d}A_t,$$

où A est un processus à variation finie. On a donc :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t H_\alpha \tilde{f}(U_s)\mathrm{d}Z_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t H_\beta H_\alpha \tilde{f}(U_s)\left\langle \mathrm{d}Z^\beta, \mathrm{d}Z^\alpha \right\rangle_s \tag{4}$$

En utilisant la remarque précédente, au sujet de la hessienne, on a donc :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t H_\alpha \tilde{f}(U_s)\mathrm{d}Z_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^2 f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s). \tag{5}$$

Ainsi, on a : $N^f(X)_t = \int_0^t H_\alpha \tilde{f}(U_s)\mathrm{d}Z_s^\alpha$.

$\Rightarrow$ Supposons que X soit une ∇-martingale alors Z est une martingale locale et donc $N^f(X)$ est une martingale locale.

$\Leftarrow$ Pour montrer la réciproque, on suppose que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^l$. On considère la fonction $f : x \mapsto x \in \mathbb{R}^l$. D'après le calcul précédent, on a :

$$N^f(X)_t = \int_0^t U_s \mathrm{d}Z_s.$$

On définit alors V_s dans $\mathcal{M}(l, d)$ par :

$$V_s\xi = \begin{cases} U_s^{-1}\xi & \text{si} \quad \xi \in T_{X_s}M \\ 0 & \text{si} \quad \xi \perp T_{X_s}M \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$W_t = \int_0^t V_s \mathrm{d}N^f(X)_s.$$

Ainsi, si $N^f(X)$ est une martingale locale, W aussi. $\square$

3 Processus de diffusion

3.1 Les laplaciens

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété se définit de la même manière que dans le cadre vectoriel de $\mathbb{R}^d$. On doit donc définir les notions de gradient et de divergence dans M.

Définition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, le gradient de f en $p \in M$ est le vecteur tel que :*

$$\forall v \in T_pM, \langle \nabla f(p), v\rangle = v.f(p) \ .$$

Le gradient de f est le dual de sa différentielle $\mathrm{d}f$ pour la métrique riemannienne.

Définition 3.2. *Soit X un champ de vecteur. La divergence de X est la trace de $Z \mapsto \nabla_Z X$. Pour toute base orthonormé $(X_i)_i$ de T_pM, on a : $div(X)_p = \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} X, X_i\rangle$.*

Définition 3.3. *L'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par : $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \Delta_M f = div \nabla f$.*

Un calcul immédiat fait le lien avec la trace de la hessienne de f.

Proposition 3.4. *Soit $(X_i)_i$ une base orthonormée de T_pM, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \Delta_M f = \sum_{i=1}^d \nabla^2 f(X_i, X_i)$.*

Cette proposition permet d'étendre naturellement le laplacien aux 1-formes. On appellera laplacien horizontal, noté Δ^h, se prolongement.

L'étude des processus de diffusion est bien connue pour des opérateurs de la forme $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^l V_i^2 + V_0$ où les V_i sont des champs de vecteurs. Dans ce cas, le processus en question est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = V_\alpha(X_t) \circ \mathrm{d}W_t^\alpha + V_0(X_t)\mathrm{d}t$$

avec W un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^l$. Malheureusement, il n'est pas possible d'exprimer le Laplacien ainsi, du moins, de manière intrinsèque, au moyen d'un plongement isométrique (théorème de Nash par exemple). C'est pourquoi on va souvent travailler à l'aide du relèvement horizontal. Il faut tout d'abord définir un laplacien sur $\mathcal{O}(M)$.

Définition 3.5. *Le laplacien horizontal de Bochner est l'opérateur sur $\mathcal{O}(M)$ définit par : $\Delta_{\mathcal{O}(M)} = \sum_{i=1}^d H_i^2$.*

Étudions le lien entre ces deux laplaciens.

Lemme 3.6. *Soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $u \in \mathcal{O}(M)$, on a :*

$$\nabla^2 f(ue_i, ue_j) = H_i H_j \tilde{f}(u).$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(M)$. On considère une courbe $(u_t) \in \mathcal{F}(M)$ telle que $u_0 = u$ et $\dot{u}_0 = H_i(u)$. On note $x_t = \pi(u_t)$. On a alors $\dot{x}_0 = T\pi(H_i(u)) = ue_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} H_i.\tilde{f}(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{f}(u_t)\right]\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(x_t)\right]\Big|_{t=0} \\ &= (ue_i).f \end{aligned}$$

Ainsi, la scalairisation de $\mathrm{d}f$ est : $\widetilde{[\mathrm{d}f]}_i(u) = H_i(u).\tilde{f}$. En utilisant l'action de la scalairisation sur la dérivée covariante, on a :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(ue_i, ue_j) &= \langle \nabla_{ue_i}(\mathrm{d}f), ue_j\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{\nabla_{ue_i}(\mathrm{d}f)}, e_j \right\rangle \\ &= \left\langle H_i(u)\mathrm{d}\tilde{f}, e_j\right\rangle \\ &= H_i H_j \tilde{f}(u) \end{aligned}$$

□

Proposition 3.7. *Le laplacien horizontal est le relèvement horizontal de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\tilde{f} = f \circ \pi$ sont relèvement à $\mathcal{O}(M)$. Pour tout $u \in \mathcal{O}(M)$, on a :*

$$\Delta_M f(x) = \Delta_{\mathcal{O}} \tilde{f}(u)$$

où $x = \pi(u)$.

Supposons que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^l$. Soit $(\xi_\alpha)_\alpha$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^l$ et désignons par $P\alpha(x)$ la projection orthogonale de ξ_α sur T_xM. P_α est un champs de vecteur sur M.

Proposition 3.8. *on a : $\Delta_M = \sum_{\alpha=1}^{l} P_\alpha^2$.*

3.2 Processus de diffusion et mouvement brownien

Notre étude va se porter sur des processus de diffusion elliptique. Par $W(M)$ on désigne l'ensemble des chemins dans M avec durée de vie. Un générateur est un opérateur différentielle elliptique.

Définition 3.9. *Un processus de diffusion sur M de générateur L est un processus $X : \Omega \to W(M)$ tel que X soit une semi-martingale et que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on ait*

$$f(X_t) - f(X_0) \overset{(m)}{=} \int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}s.$$

Nous n'étudierons que des générateur de la forme $L = \Delta + b$, où b est un champ de vecteur sur M. L'exemple le plus simple est celui du mouvement brownien. Il existe de nombreuse manière de définir le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$. Celle qui se prête le mieux à l'extension aux variétés est la notion de processus de diffusion.

Définition 3.10. *Un mouvement browniens est un processus de diffusion de générateur $\frac{1}{2}\Delta_M$, i.e. pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a :*

$$f(X_t) - f(x_0) \overset{(m)}{=} \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(X_s)\mathrm{d}s$$

Pour construire une semi-martingale sur une variété, il est plus simple de partir de son anti-développement, qui est un processus dans un espace vectoriel. Celui du mouvement brownien est assez simple : c'est un mouvement brownien vectoriel.

Theorem 3.11. *Soit X une semi-martingale dans M, U son relèvement horizontal dans $\mathcal{O}(M)$ partant de U_0 et Z son anti-développement. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) Z est un mouvement brownien vectoriel.

ii) U est un processus de diffusion de générateur $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}}$.

iii) X est un mouvement brownien.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}(M))$, en utilisant la formule (4), on a :

$$\mathrm{d}F(U_t) = H_\alpha F(U_t)\mathrm{d}Z_t^\alpha + \frac{1}{2}H_\beta H_\alpha F(U_t)\left\langle \mathrm{d}Z^\beta, \mathrm{d}Z^\alpha \right\rangle_t$$

Or Z est un mouvement brownien vectoriel, on a donc : $\left\langle \mathrm{d}Z^\beta, \mathrm{d}Z^\alpha \right\rangle_t = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{d}t$. Ainsi, on a :

$$F(U_t) - F(U_0) \overset{(m)}{=} \int_0^t \frac{1}{2}\sum_\alpha H_\alpha^2 F(U_s)\mathrm{d}t.$$

Donc U est un processus de diffusion dans $\mathcal{O}(M)$ de générateur $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}(M))$ par :

$$\forall u \in \mathcal{O}(M), \tilde{f}(u) = f(\pi(u)).$$

En utilisant la proposition 3.7, on a :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \tilde{f}(U_t) - \tilde{f}(U_0) \\ &\overset{(m)}{=} \int_0^t \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}}\tilde{f}(U_s)\mathrm{d}t \\ &\overset{(m)}{=} \int_0^t \frac{1}{2}\Delta_M f(X_s)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi X est bien un processus de diffusion dans M de générateur $\frac{1}{2}\Delta_M$ *i.e.* un mouvement brownien.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Cette implication nécessite de se plonger dans un $\mathbb{R}^l$. L'idée est la suivante. On note $(\xi_\alpha)_{1\leq\alpha\leq l}$ la base standard de $\mathbb{R}^d$, f^α les fonctions coordonnées, $\tilde{f}^\alpha = f \circ \pi$ leurs relèvements et $L = \frac{1}{2}\Delta_M$. Par hypothèse, on a :

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + M_t^{f^\alpha} + \int_0^t Lf^\alpha(X_s)\mathrm{d}s,$$

où M^{f^α} est une martingale locale réelle. On montre ensuite que

$$\int_0^t \nabla^2 f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) = \int_0^t \Delta_M f(X_s)\mathrm{d}s.$$

Cela permet d'identifier : $\mathrm{d}M_t^{f^\alpha} = H_i f^\alpha(U_t)\mathrm{d}W_t^i$. On peut alors inverser la système et montrer que W est un mouvement brownien par la caractérisation de Lévy. □

Le mouvement brownien n'est qu'un cas particulier mais nous avons un théorème similaire pour les processus de diffusion elliptique qui nous intéressent.

Theorem 3.12. *On considère une semi-martingale dans M et U son relèvement horizontal. X est une diffusion de générateur $L = \frac{1}{2}\Delta_M + b$ si et seulement si U est une diffusion de générateur $L^h = \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}} + \nabla_b$.*

La démonstration reprend exactement les mêmes calculs, avec un terme en plus.

4 Transports stochastiques

4.1 Transport parallèle stochastique

Nous allons maintenant étudier le transport stochastique au dessus d'un processus de diffusion. Soit X un processus de diffusion dans M de générateur $L = \frac{1}{2}\Delta_M + b$ (avec b un champ de vecteurs sur M) partant de x. On note U un relèvement horizontale dans $\mathcal{O}(M)$. C'est un processus de diffusion dans $\mathcal{O}(M)$ de générateur $L^h = \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}} + \nabla_b$. On définit le transport parallèle stochastique de la même manière que dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Définition 4.1. *Le transport parallèle au dessus de X est le processus $/\!\!/$ avec $/\!\!/_t = U_t U_0^{-1}$*

Pour tout t, $/\!\!/_t$ est une isométrie $/\!\!/_t : T_xM \to T_{X_t}M$. Soit $v \in T_xM$, le processus $/\!\!/(v)$ est donc un processus dans TM au dessus de X. La question est de savoir s'il a hérité du caractère diffusif de X (et de U). Le problème c'est que l'on ne sait pas entièrement prolonger le laplacien à TM. On ne peut donc pas définir un générateur sur TM. En revanche pour les formes linéaires tout se passe bien. On va donc pouvoir montrer que $/\!\!/(v)$ est un processus avec générateur sur les 1-formes.

Lemme 4.2. *Soient $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, $v \in T_xM$ et $U_0 \in \mathcal{O}(M)$. On note $\tilde{f}$ la fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}(M))$ définie par : $\tilde{f}(u) = \langle \alpha, uU_0^{-1}v\rangle$. On a alors :*

$$H_i\tilde{f}(u) = \langle \nabla_{ue_i}\alpha, uU_0^{-1}v\rangle,$$

et

$$H_i^2\tilde{f}(u) = \nabla^2\alpha(ue_i, iue_i)(uU_0^{-1}v).$$

Démonstration. Par définition de $\tilde{f}$, on a : $\mathrm{d}\tilde{f}_u(w) = \mathrm{d}\alpha_{uU_0^{-1}v}(wU_0^{-1}v)$ pour tout $w \in T_uTM$. On a donc :

$$\begin{aligned} H_i\tilde{f}(u) &= \langle \mathrm{d}\tilde{f}(u), H_i(u)\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}\tilde{f}(u), h_u(ue_i)\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}\alpha, h_u(ue_i)U_0^{-1}v\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}\alpha, \tilde{h}_{uU_0^{-1}v}(ue_i)\rangle \\ &= \langle \nabla_{ue_i}\alpha, uU_0^{-1}v\rangle \end{aligned}$$

La deuxième égalité s'obtient en itérant le calcul. □

Theorem 4.3. *Soit X un processus de diffusion dans M de générateur $L = \frac{1}{2}\Delta_M + b$. Son transport parallèle stochastique a pour générateur sur les 1-forme $L^{/\!\!/} = \Delta^h + \nabla_b$ i.e pour tout $v \in T_xM$ et tout $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, on a :*

$$\langle \alpha(X_t), /\!\!/_t(v)\rangle - \langle \alpha(x), v\rangle \overset{(m)}{=} \int_0^t \langle L^{/\!\!/}\alpha, /\!\!/_s(v)\rangle \mathrm{d}s.$$

Démonstration. Soient $v \in T_xM$ et $\alpha \in \Gamma(T^*M)$. On pose $\tilde{f}(u) = \alpha(uU_0^{-1}v)$. On a :

$$\langle \alpha /\!\!/_t (v)\rangle - \langle \alpha, v\rangle = \tilde{f}(U_t) - \tilde{f}(U_0) \overset{(m)}{=} \int_0^t L^h\tilde{f}(U_s)\mathrm{d}s.$$

Il suffit dot de montrer que l'on a $L^h\tilde{f}(U_t) = \langle L^{/\!\!/}\alpha, /\!\!/_t(v)\rangle$.

On a : $\Delta_{\mathcal{O}} = \sum H_i^2$. D'après le lemme précédent, on a donc : $\Delta_{\mathcal{O}}\tilde{f}(U_t) = \langle \Delta^h\alpha, /\!\!/_t(v)\rangle$. De même, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_b\tilde{f}(U_t) &= \sum \langle b, U_te_i\rangle H_i\tilde{U}_t \\ &= \sum \langle b, U_te_i\rangle \langle \nabla_{U_te_i}\alpha, U_tU_0^{-1}v\rangle \\ &= \sum \langle b, U_te_i\rangle \langle \nabla_{U_te_i}\alpha, /\!\!/_t(v)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\sum\langle b, U_te_i\rangle U_te_i}\alpha, /\!\!/_t(v)\rangle \\ &= \langle \nabla_b\alpha, /\!\!/_t(v)\rangle \end{aligned}$$

□

4.2 La formule de Weitzenböck

Nous avons vu que l'opérateur de Laplace-Beltrami s'étendait bien aux 1-formes. Cependant, en dépit de son lien fort avec le mouvement brownien, il a un inconvénient quand il s'agit de travailler avec des p-formes : il ne commute pas avec la dérivée extérieure. Dans ce cadre, le laplacien de Hodge-de Rham, $\Box_M$, est plus approprié.

Soient α et β deux formes différentielles de même degré. On définit leur produit scalaires par :

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle_x \mathrm{d}x.$$

On considère alors, δ, l'adjoint de la dérivée extérieur d pour ce produit scalaire, *i.e.* si α est un p-forme et β un $(p+1)$-forme, alors : $(\mathrm{d}\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$.

Définition 4.4. *Le laplacien de Hodge-de Rham est l'opérateur* $\Box_M = -(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})$.

On remarque que sur $\mathcal{C}^\infty(M)$, les deux laplaciens coïncident. Leur différence sera donnée par la formule de Weitzenböck. Pour la démontrer nous allons avoir besoin de quelques outils. Tout d'abord, nous allons utiliser le produit intérieur i. C'est une anti-dérivation. Pour tout vecteur X et tout p-forme α, $i(X)\alpha$ est une $(p-1)$-forme définie par :

$$i(X)\alpha(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

Lemme 4.5. *Soit $(X_i)_i$ une base orthonormée de T_xM et $(X^i)_i$ sa base duale. Pour toute p-forme α, on a :*

$$\mathrm{d}\alpha = X^i \wedge \nabla_{X_i}\alpha$$

et

$$\delta\alpha = -i(X_i)\nabla_{X_i}\alpha.$$

Démonstration. On prend $X_i = \partial/\partial x^i$ où (x_i) est un système de coordonnées normales en x. On a alors :$X^i = \mathrm{d}x_i$. On utilise alors la formule :$\nabla_{X_i}(\mathrm{d}x_j) = -\Gamma^j_{ik}\mathrm{d}x_k$. □

Pour ce qui nous intéresse, nous allons étudier la formule de Weitzenböck uniquement sur les 1-formes.

Theorem 4.6 (formule de Weitzenböck pour les 1-forme)**.** *Soit α une 1-forme. On a :*

$$\Box_M\alpha = \Delta_M\alpha - \operatorname{Ric}\alpha,$$

où $\langle \operatorname{Ric}\alpha, v\rangle = \langle \alpha, \operatorname{Ric}^\#(v)\rangle$.

Démonstration. On travaille dan un système de coordonnées normales donc $\nabla_{X_j}X^i = 0$ pour tout i, j. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\delta\mathrm{d}\alpha &= \delta(X^i \wedge \nabla_{X_i}\alpha) \\
&= -i(X_j)\nabla_{X_j}(X^i \wedge \nabla_{X_i}\alpha) \\
&= -i(X_j)(\nabla_{X_j}X^i \wedge \nabla_{X_i}\alpha) - i(X_j)(X^i \wedge \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha) \\
&= -i(X_j)(X^i \wedge \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha) \\
&= -i(X_j)X^i \wedge \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha + X^i \wedge i(X_j)\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha \\
&= -\delta_{ij}\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha + X^i \wedge i(X_j)\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\delta\alpha &= -\mathrm{d}(i(X_j)\nabla_{X_j}) \\
&= -X^i \wedge \nabla_{X_i}(i(X_j)\nabla_{X_j}) \\
&= -X^i \wedge (i(X_j)\nabla_{X_i}\nabla_{X_j} + (i(\nabla_{X_j})\nabla_{X_j}) \\
&= -X^i \wedge (i(X_j)\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de $\Box_M\alpha$ est :

$$\Box_M\alpha = \nabla_{X_i}\nabla_{X_i}\alpha + X^i \wedge i(X_j)\left(\nabla_{X_i}\nabla_{X_j} - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\right).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta^h\alpha &= \nabla^2\alpha(X_i, X_i) \\
&= \nabla_{X_i}(\nabla\alpha)(., X_i) \\
&= \nabla_{X_i}\nabla_{X_i}\alpha - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}\alpha \\
&= \nabla_{X_i}\nabla_{X_i}\alpha
\end{aligned}$$

On note R le tenseur de courbure de M. On pose $R(X, Y) : T^*M \to T^*M$ tel que $\langle R(X, Y)\alpha, Z\rangle = \langle \alpha, R(X, Y)Z\rangle$. On a donc :

$$\Box_M\alpha = \Delta^h\alpha + \langle \alpha, R(X_i, X_j)X_j\rangle X^i = \Delta^h\alpha - \operatorname{Ric}\alpha.$$

□

Le laplacien de Hodge-de Rham vérifie la propriété de commutation avec la dérivée extérieure.

Proposition 4.7.

$$\mathrm{d}\Box_M = \Box_M \mathrm{d}.$$

4.3 Le transport parallèle déformé

Nous avons vu comment le transport parallèle permettait de transporter de manière isométrique des vecteurs le long d'une semi-martingale. Le transport parallèle est fortement lié au laplacien de Laplace-Beltrami. On aimerait construire un autre transport qui soit cette fois-ci lié au laplacien de Hodge-de Rham.

Définition 4.8. *Soit X un processus de diffusion dans M, de générateur $L = \frac{1}{2}\Delta_M + b$, partant de $X_0 = x$. Le transport parallèle déformé au dessus de X est le processus W tel que*

i) $W_t : T_xM \to T_{X_t}M$ est un isomorphisme

ii) $W_0 = id_{T_xM}$

iii) pour tout $v \in T_xM$, $DW_t(v) = (-\frac{1}{2}\operatorname{Ric}^{\#}(W_t(v)) + \nabla_{W_t} b)\mathrm{d}t$

avec $DW_t = /\!\!/_t(\mathrm{d}(/\!\!/_t^{-1} W_t)$.

On notera que cette équation est une équation vectorielle. Elle admet une unique solution : le transport parallèle déformé. Si le transport parallèle peut être définit au dessus d'une semi-martingale quelconque, on ne définit le transport parallèle déformé qu'au-dessus d'un processus de diffusion. De même que pour le transport parallèle, le transport parallèle déformé au dessus d'un processus de diffusion possède un générateur sur les 1-formes.

Proposition 4.9. *Soit X un processus de diffusion dans M, de générateur $L = \frac{1}{2}\Delta + b$, partant de $X_0 = x$. Le générateur sur les 1-formes de son transport parallèle déformé est L^W définit par : pour tout $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, pour tout $x \in TM$,*

$$\langle L^W \alpha, w\rangle = \langle \frac{1}{2}\Box\alpha + \nabla_b \alpha, w\rangle + \langle \alpha, \nabla_w b\rangle.$$

Démonstration. On note $D\alpha = \mathrm{d}(\alpha /\!\!/)/\!\!/^{-1}$. Comme le transport parallèle est une isométrie, on a :

$$\langle \alpha(X_t), W_t(v)\rangle = \langle \alpha(X_t)/\!\!/, /\!\!/^{-1} W_t(v)\rangle.$$

En passant à la différentielle au sens d'Itô, on a :

$$\mathrm{d}\langle \alpha(X_t), W_t(v)\rangle = \langle D\alpha(X_t), W_t(v)\rangle + \langle \alpha(X_t), DW_t(v)\rangle + \langle D\alpha(X_t), DW_t(v)\rangle.$$

Le terme de crochet $\langle D\alpha(X_t), DW_t(v)\rangle$ est nul car DW ne comporte qu'une composante à variation finie. D'après les résultats sur le transport parallèle, on dispose d'une martingale M^α telle que :

$$\langle \alpha, /\!\!/_t(w)\rangle - \langle \alpha, w\rangle = M_t^\alpha + \int_0^t \langle L^{/\!\!/}\alpha, /\!\!/_s(w)\rangle \mathrm{d}s.$$

On en déduit donc que $\langle D\alpha, W_t\rangle = \langle L^{/\!\!/}\alpha, W_t\rangle \mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t$. Ainsi, on a

$$\langle \alpha(X_t), W_t(v)\rangle \overset{(m)}{=} \int_0^t \langle L^W \alpha(X_s), W_s(v)\rangle \mathrm{d}s,$$

avec

$$\begin{aligned}\langle L^W \alpha(X_t), W_t(v)\rangle &= \langle L^{/\!\!/}\alpha(X_t), W_t(v)\rangle + \langle \alpha(X_t), -\frac{1}{2}\operatorname{Ric}^{\#}(W_t(v)) + \nabla_{W_t} b\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}\Box\alpha + \nabla_b\alpha, w\rangle + \langle \alpha, \nabla_w b\rangle\end{aligned}$$

□

Références

[Emery] Michel Emery. *Stochastic Calculus in Manifolds.* Springer-Verlag, 1989.

[Hsu] Elton P.Hsu. *Stochastic Analysis on Manifolds.* American Mathematical Society, 2002.

[Kobayashi] Shoshichi Kobayashi et Katsumi Nomizu. *Fondations of Differential Geometry.* Interscience Publishers, 1963