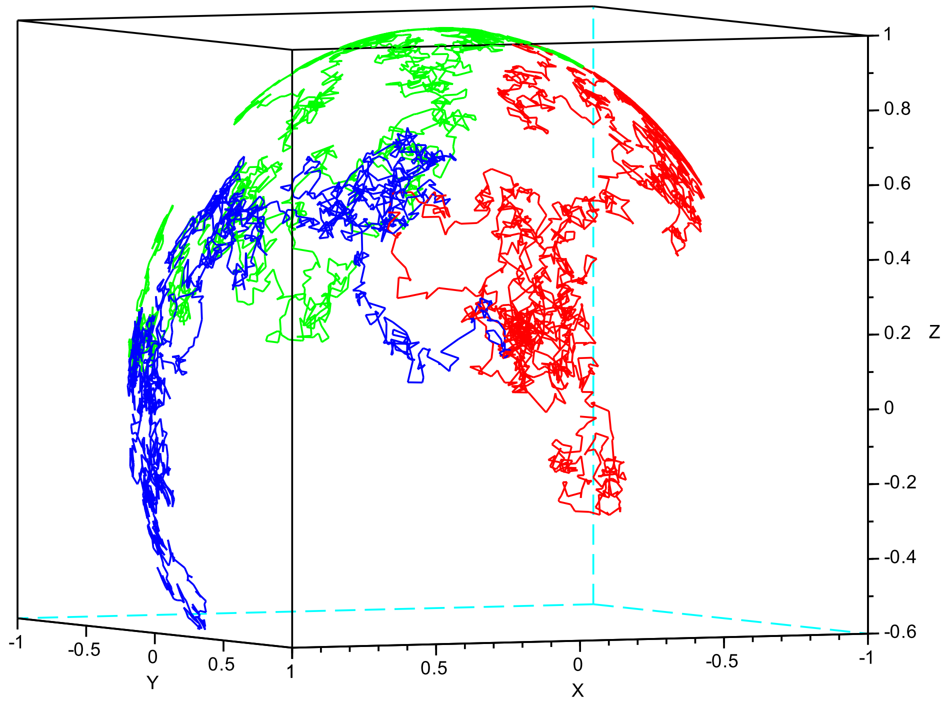
Mouvement brownien sur un groupe de Lie.



Baptiste Huguet
Université de RENNES 1

Séminaire de Master 2.

ENCADRANT : Jurgen Angst

Janvier 2017

Table des matières

Introduction **3**

I Comment définir un mouvement brownien sur un groupe de Lie ? **4**
I.1 Algèbres et groupes de Lie. 4
I.2 Première définition du mouvement brownien sur un groupe de Lie. 5

II EDS et existence du mouvement brownien. **7**

III Exemples de mouvement brownien. **11**
III.1 Mouvement brownien sur le groupe d'Heisenberg. 11
III.2 Mouvement brownien sur le groupe spécial linéaire. 12

IV Approximation. **13**

Conclusion **14**

Bibliographie **16**

Introduction

Lorsqu'un grain de pollen évolue dans un verre d'eau, la trajectoire observé ne semble avoir aucune cohérence : le mouvement ne s'arrête jamais et la direction du grain change sans cesse. Il existe des situations similaires en physique, en biologie ou en finance. Le mouvement brownien est la traduction mathématiques de l'idée de trajectoire continue, totalement erratique. Dans $\mathbb{R}^n$, on sait le définir correctement, on connaît bien ses propriétés et on sait comment l'approximer.

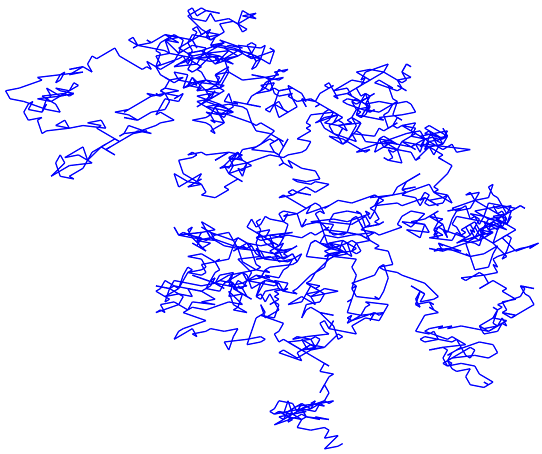


FIGURE 1 – Approximation d'un mouvement brownien dans le plan.

Si l'on étudie le mouvement d'un pendule pesant, la masse ne peut pas se déplacer dans tout l'espace : elle restera à distance fixe du point d'accroche. Dans la plupart des systèmes physiques, il existe des contraintes (la conservation d'une énergie par exemple) qui forcent les objets étudiés à vivre dans une partie de l'espace, dans une sous-variété. C'est cette raison qui motive, par exemple, l'étude des extréma liés. La question de la définition d'un mouvement brownien sur une variété se pose alors assez naturellement.

Nous étudierons ici la définition et l'existence d'un mouvement brownien sur des variétés un peu particulières : les groupes de Lie. Ce sont des groupes munis d'une structure de variété. Nous essaierons de définir la notion de mouvement brownien et montrerons pourquoi il existe avant de traiter de son approximation.

Chapitre I

Comment définir un mouvement brownien sur un groupe de Lie ?

Dans cette première partie nous allons clarifier le cadre dans lequel nous allons travailler et donner une première définition du mouvement brownien sur un groupe de Lie.

I.1 Algèbres et groupes de Lie.

Un *groupe de Lie* est un groupe muni d'une structure de sous-variété et pour lequel le produit et le passage à l'inverse sont des opérations lisses. Les exemples types d'un tel groupe sont le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ses sous-groupes de Lie : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\ldots$ A un tel groupe G, on peut associer une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, on l'identifie à l'espace tangent à G (en temps que variété) en l'identité, muni d'une opération crochet.

Exemples.
L'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'algèbre de Lie de $\mathbb{S}^1 \simeq \mathrm{SO}(2)$ est $\mathbb{R}$.
L'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle, notée $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cadre de ce séminaire, nous allons utiliser le point de vu inverse : on part des algèbres de Lie pour définir le groupe de Lie associé à cette algèbre. Par ailleurs, nous ne travaillerons qu'à partir de l'algèbre de Lie standard : l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munie du crochet de Lie

$$[A, B] = AB - BA \quad .$$

Définition 1.

Une *algèbre de Lie* de matrice est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par $[\,,]$.

Des groupes de Lie non-isomorphes peuvent avoir la même algèbre de Lie, c'est le cas de $\mathrm{SO}(n)$ et $O(n)$ par exemple. En fait, l'algèbre de Lie de G, un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble des matrices A telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tA} soit dans G. Ainsi, un groupe et sa composante neutre (composante connexe en l'identité) auront toujours la même algèbre de Lie. On peut cependant associé à une algèbre de Lie un unique groupe.

Définition 2.

Le *groupe associé* à une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ engendré par l'image de $\mathfrak{G}$ par l'exponentielle.

Remarque. De tels groupes ne sont en général pas des groupes de Lie (pourquoi seraient-ils fermés ?).

L'exponentielle joue un rôle clef dans l'étude des groupes de Lie. De manière général on peut toujours définir une application exponentielle qui permet de faire le lien entre l'algèbre de Lie et le groupe de Lie. Celle-ci permet de faire remonter des propriétés sur l'algèbre (qui est un espace vectoriel) vers le groupe de Lie (qui est une variété) et permet de définir des objets sur le groupe à partir d'objets construit sur l'algèbre de Lie.

Soit G un groupe de Lie. Son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ peut aussi être comprise comme une algèbre de dérivations sur les fonctions définies sur ce groupe. Considérons $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \in \mathfrak{G}$.

Définition 3.

La *dérivée de Lie* (à droite) $\mathcal{L}_A f$ est définie par :

$$\mathcal{L}_A f(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(g e^{tA}\right)\Big|_{t=0} \quad .$$

On dira qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si pour tout A, $\mathcal{L}_A f$ existe et est continue.

I.2 Première définition du mouvement brownien sur un groupe de Lie.

La définition d'un mouvement brownien sur un groupe de Lie va tenter de prolonger, d'une certaine manière, celle du mouvement brownien réel. La construction effective du mouvement brownien sur un groupe de Lie utilisera fortement le mouvement brownien réel.

Définition 4.

- Un mouvement brownien réel est un processus X continu tel que X_0 $\mathbb{P} - ps$ et $\forall 0 \leq s, t,\ X_{t+s} - X_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t)$, indépendant de $\sigma(X_r / 0 \leq r \leq s)$.
- Un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un processus dont les coordonnées sont des mouvement browniens réels indépendants.

On retiendra l'idée suivante : "le mouvement brownien est un processus à accroissements stationnaires indépendants". C'est elle qui motive cette définition du mouvement brownien sur un groupe de Lie.

Définition 5.

Un processus X à valeurs dans G est appelé *mouvement brownien* (invariant à gauche) si

1. X est continu ;
2. pour tout $s \geq 0$, le processus $(X_s^{-1} X_{t+s})_{t \geq 0}$ est indépendant de $(X_r)_{r \leq s}$;
3. pour tout $s \geq 0$, les processus $(X_s^{-1} X_{t+s})_{t \geq 0}$ et X ont la même loi.

Exemples.
Soit B un mouvement brownien réel. On définit le processus X, à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ par : $\forall t \geq 0,\ X_t = e^{iB_t}$. C'est un mouvement brownien sur le groupe de Lie $\mathbb{S}^1$ car on a :

$$\forall 0 \leq s, t,\ X_s^{-1} X_{t+s} = e^{i(B_{t+s} - B_s)}$$

et les propriétés du mouvement brownien réel permettent de conclure.

Il y a une certaine idée à retenir de cet exemple. Le groupe de Lie $\mathbb{S}^1$ a pour algèbre de Lie $\mathbb{R}$. L'application exponentielle qui lie les deux est : $\exp : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\alpha} \in \mathbb{S}^1$. Dans ce cas, l'image par l'exponentielle d'un mouvement brownien dans l'algèbre de Lie est donc un mouvement brownien dans le groupe de Lie. De plus, il est facile de construire un mouvement brownien dans une algèbre de Lie : ce sont des mouvements browniens dans des $\mathbb{R}^N$. Nous avons donc une ébauche de recette qui fournit des mouvements browniens dans les groupes de Lie. Cependant, le cas de $\mathbb{S}^1$ reste assez exceptionnel. En effet, pour deux matrices A et B quelconques, on a généralement : $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Cette méthode ne va donc fonctionner que dans des algèbres de Lie engendrée par de matrices qui commutent entre elles.

Cette définition reste assez floue sur la nature du mouvement brownien : elle semble laisser une certaine latitude. Elle ne permet pas non plus de répondre à la question de l'existence. Nous allons donc voir dans la partie suivante une seconde définition, qui sera plus révélatrice sur la nature du mouvement brownien. Bien sûr les deux définitions seront équivalentes.

Chapitre II

EDS et existence du mouvement brownien.

Dans cette section nous allons définir le mouvement brownien sur un groupe de Lie comme l'unique solution d'une équation différentielle stochastique à coefficient dans l'algèbre de Lie. Les théorèmes d'existence de solution à de telles équations démontreront alors l'existence des mouvement brownien.

Théorème 6.

Soient $A_0, A_1 \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $W = (W^1, \ldots, W^k)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^k$. Alors il existe un unique processus continu X à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, adapté à la filtration associée à W, solution de l'EDS :

$$X_t = id + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t X_s A_j \mathrm{d}W_s^j + \int_0^t X_s \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \mathrm{d}s \ \forall t \geq 0 \quad . \tag{II.1}$$

De plus, pour tout $s \geq 0$, le processus $(X_s^{-1} X_{t+s})_{t \geq 0}$ est indépendant de $\sigma(W_r / r \leq s)$ et a même loi que X.

Démonstration. L'existence et l'unicité sont des résultats classiques, les condition de lipschitzianité étant remplies. De plus, pour tout $0 \leq r, t$, on a :

$$\begin{aligned}
X_{r+t} &= id + \sum_{j=1}^{k} \int_0^{t+r} X_s A_j \mathrm{d}W_s^j + \int_0^{t+r} X_s \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \mathrm{d}s \\
&= X_r + \sum_{j=1}^{k} \int_r^{t+r} X_s A_j \mathrm{d}W_s^j + \int_r^{t+r} X_s \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \mathrm{d}s \\
&= X_r + \sum_{j=1}^{k} \int_0^{t} X_{r+s} A_j \mathrm{d}(W_{r+s}^j - W_r^j) + \int_0^{t} X_{r+s} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \mathrm{d}s \\
X_r^{-1} X_{r+t} &= id + \sum_{j=1}^{k} \int_0^{t} X_r^{-1} X_{r+s} A_j \mathrm{d}(W_{r+s}^j - W_r^j) + \int_0^{t} X_r^{-1} X_{r+s} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Autrement dit, le processus $(X_r^{-1} X_{r+t})_{0 \leq t}$ est solution de la même équation que X, à un décalage du mouvement brownien près. Ce qui termine la preuve. □

Remarque. Le processus $W^{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{k} A_j W^j$ est un mouvement brownien dans la sous-algèbre de Lie engendrée par les matrices $A_1, \ldots, A_k$. La matrice A_0 est appelé *dérive* ou *drift* du processus X.

Proposition 7.

Soit X la solution de l'équation (II.1) et soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\phi(X_t) = \phi(id) + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \mathcal{L}_{A_j}\phi(X_s)\mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{A_j}^2 + \mathcal{L}_{A_0} \right) \phi(X_s)\mathrm{d}s \;\forall t \geq 0 \quad .$$

Démonstration. On applique la formule d'Itô. On a :

$$\begin{aligned}
\phi(X_t) - \phi(id) &= \sum_{1\leq a,b \leq n} \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial X^{a,b}}(X_s)\mathrm{d}X_s^{a,b} + \frac{1}{2} \sum_{1\leq a,b,\alpha,\beta \leq n} \int_0^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{a,b}\partial X^{\alpha,\beta}}(X_s)\mathrm{d}\left\langle X^{a,b}, X^{\alpha,\beta} \right\rangle_s \\
&= \sum_{1\leq a,b \leq n} \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial X^{a,b}}(X_s) \left[\sum_{j=1}^{k} (X_s A_j)^{a,b}\mathrm{d}W_s^j + \left(X_s \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 + A_0 \right) \right)^{a,b} \mathrm{d}s \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{1\leq a,b,\alpha,\beta \leq n} \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{a,b}\partial X^{\alpha,\beta}}(X_s)(X_s A_j)^{a,b}(X_s A_j)^{\alpha,\beta}\mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \mathcal{L}_{A_j}\phi(X_s)\mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{A_j^2} + \mathcal{L}_{A_0} \right) \phi(X_s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \left(\mathcal{L}_{A_j}^2 \phi(X_s) - \mathcal{L}_{A_j^2}\phi(X_s) \right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

En effet, il est à remarquer que l'on a :

$$\mathcal{L}_A \phi(X_s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi\left(X_s e^{tA} \right) \Big|_{t=0} = \sum_{1\leq a,b \leq n} \frac{\partial \phi}{\partial X^{a,b}}(X_s)(X_s A)^{a,b} \quad ,$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_A^2 \phi(X_s) - \mathcal{L}_{A^2}\phi(X_s) &= \sum_{1\leq a,b \leq n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \phi}{\partial X^{a,b}}(X_s e^{tA})(X_s e^{tA} A)^{a,b} \Big|_{t=0} - \sum_{1\leq a,b \leq n} \frac{\partial \phi}{\partial X^{a,b}}(X_s)(X_s A^2)^{a,b} \\
&= \sum_{1\leq a,b,\alpha,\beta \leq n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{a,b}\partial X^{\alpha,\beta}}(X_s)(X_s A)^{a,b}(X_s A)^{\alpha,\beta}\mathrm{d}s
\end{aligned} \quad .$$

□

Remarque. L'opérateur différentiel $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{A_j}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$ est appelé *générateur infinitésimal* du processus X. En notation de Stratonovich, on a :

$$\phi(X_t) = \phi(id) + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \mathcal{L}_{A_j}\phi(X_s) \circ \mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \mathcal{L}_{A_0}\phi(X_s)\mathrm{d}s \quad .$$

Corollaire 8.

Le processus X est presque sûrement à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On considère la fonction $\phi : X \mapsto \det(X)$. D'une part, on a : $\mathcal{L}_A \det(X) = \mathrm{Tr}(A)\det(X)$. En appliquant la proposition précédente, on a donc :

$$\det(X_t) = id + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \det(X_s)\,\mathrm{Tr}(A_j)\mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Tr}(A_j)^2 + \mathrm{Tr}(A_0)\right]\det(X_s)\mathrm{d}s \quad .$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô, on constate que le processus

$$\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Tr}(A_j)W_t^j + \mathrm{Tr}(A_0)t\right)\right)_{0\leq t}$$

vérifie la même équation. Ils sont donc presque sûrement égaux. Ainsi, presque sûrement, le déterminant de X ne s'annule pas. $\square$

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9.

Soit X l'unique solution de l'équation (II.1) avec coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_k$. On note $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie engendrée par ces matrices et G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ associé. Alors, presque sûrement, le processus X est à valeur dans G.

Définition 10.

Le processus X est appelé *mouvement brownien* sur G, de générateur $\mathcal{A}$.

Remarque. Le processus X est un mouvement brownien au sens de la première définition que nous avons donné. En fait, on ne le démontrera pas, mais ces deux définitions sont équivalentes.

Démonstration. Soient $\nu_0 \subset\subset \nu \subset\subset \nu'$ des voisinages compacts de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\subset\subset$ signifie "inclus dan l'intérieur"). Le voisinage ν' est choisi de manière à ce que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de ce voisinage sur son image. On définit les temps d'arrêts $\tau_n u = \inf\{t \geq 0 / X_t \notin \exp(\mathfrak{G})\}$ (*idem* pour ν_0 et ν'). Pour tout $0 \leq t \leq \tau_{\nu'}$, on pose : $M_t = \exp^{-1}(X_t) \in \nu'$. La différentielle $\mathrm{d}\exp_{M_t}$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vers $T_{M_t}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \exp_{M_t}\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ donné par :

$$\mathrm{d}\exp_{M_t}(B) = \exp_{M_t}\alpha_{M_t}(B) \quad ,$$

où α_{M_t} est un isomorphisme dépendant de manière analytique en M_t. Pour tout $A \in \mathfrak{G}$, on a donc :

$$\mathcal{L}_A \exp^{-1}(X_t) = \mathrm{d}\exp^{-1}_{X_t}(X_t A) = \alpha^{-1}_{M_t}(A) \quad .$$

On peut donc appliquer la proposition précédente à la fonction $\exp^{-1}$. Pour tout $0 \leq t \leq \tau_{\nu'}$, M_t vérifie donc :

$$M_t = \sum_{j=1}^{k}\int_0^t \alpha^{-1}_{M_s}(A_j)\circ \mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \alpha^{-1}_{M_s}(A_0)\mathrm{d}s \quad .$$

On considère maintenant une fonction plateau, ψ, qui vaut 1 sur ν_0 et qui est nulle en dehors de ν et l'EDS suivante :

$$M'_t = \sum_{j=1}^{k}\int_0^t \left[\alpha^{-1}_{M'_s}(A_j)\psi(M'_s)\right]\circ \mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \alpha^{-1}_{M_s}(A_0)\psi(M'_s)\mathrm{d}s \tag{II.2}$$

avec $M'_t = x_t^1 V1 + \ldots + x_t^l V_l$ un processus dans $\mathfrak{G}$ ($(V_i)_i$ est une base de l'algèbre $\mathcal{G}$). On remarque que les coefficients $\alpha^{-1}_{M'_s}(A_j)\psi(M'_s)$ sont bien définis pour tout s car ils sont nuls lorsque M'_s sort de

ν. De plus, la restriction de $\alpha_{M'_s}^{-1}$ à $\mathfrak{G}$ est un automorphisme. En tant qu'EDS d'inconnue $(x^1, \ldots, x^l)$, l'équation (II.2) vérifie les conditions d'existence et d'unicité. Il existe donc un unique processus M', à valeur dans $\mathfrak{G}$ vérifiant l'équation (II.2). De plus, pour tout $t \in [0, \tau_{\nu_0}[$, le processus M vérifie l'équation (II.2). Ainsi, par unicité, $M_t \in \mathfrak{G}$ pour tout $t \in [0, \tau_{\nu_0}]$, *id est* $X_t \in G$ pour tout $t \in [0, \tau_{\nu_0}]$. Pour finir, on peut appliquer cette méthode au processus $X'_t = X_{\tau_{\nu_0}}^{-1} X_{\tau_{\nu_0}+t}$, qui vérifie la même équation que X. On obtient que $X_t \in G$ pour tout $t \in [0, 2\tau_{\nu_0}]$. Par récurrence, on obtient le résultat. □

A partir d'une algèbre de Lie, nous sommes donc à présent capable de définir un mouvement brownien dans le groupe associé à cette algèbre. En partant d'un groupe de Lie, peut-on définir un mouvement dans ce groupe ? La question revient à se demander si le groupe associé à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est-il ce groupe de Lie ? La réponse est oui si le groupe de Lie est connexe. Si le groupe de Lie n'est pas connexe, le groupe associé à son algèbre de Lie sera donc sa composante neutre. Le mouvement brownien étant un processus continu, ce résultat nous suffit donc.

Chapitre III

Exemples de mouvement brownien.

Il existe des cas pour lesquels on peut expliciter les mouvement browniens.

III.1 Mouvement brownien sur le groupe d'Heisenberg.

On considère le groupe d'Heisenberg, $\mathcal{H}^3$, des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est l'identité. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$, l'algèbre des matrices strictement triangulaires supérieures. Une base de $\mathfrak{h}$ est donné par $(A_1, A_2, [A_1, A_2])$, avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [A_1, A_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On note $[x, y, z]$ la matrice de $\mathcal{H}^3$ définie par :

$$[x, y, z] = \exp\left(xA_1 + yA_2 + z[A_1, A_2]\right) = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Proposition 11.

Soit (W^1, W^2) un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$. Le processus X défini par :

$$X_t = \left[W_t^1, W_t^2, \frac{1}{2}\int_0^t W_s^1 \mathrm{d}W_s^2 - W_s^2 \mathrm{d}W_s^1\right] , \quad \forall t \geq 0$$

est un mouvement brownien dans $\mathcal{H}^3$.

Démonstration. Par définition de X, on a :

$$X_t = id + W_t^1 A_1 + W_t^2 A_2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t W_s^1 \mathrm{d}W_s^2 - W_s^2 \mathrm{d}W_s^1 + W_t^1 W_t^2\right)[A_1, A_2] , \quad \forall t \geq 0 \quad .$$

On a alors :

$$\mathrm{d}X_t = A_1 \mathrm{d}W_t^1 + A_2 \mathrm{d}W_t^2 + W_s^1 \mathrm{d}W_s^2 [A_1, A_2] \quad .$$

On vérifie alors facilement que X est solution de l'équation :

$$\mathrm{d}X_t = X_t A_1 \mathrm{d}W_t^1 + X_t A_2 \mathrm{d}W_t^2 \quad ,$$

c'est un mouvement brownien de générateur nul. □

III.2 Mouvement brownien sur le groupe spécial linéaire.

L'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. On considère sa sous-algèbre de Lie ayant pour base (A_1, A_2) avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit X un mouvement brownien sur $SL_2(\mathbb{R})$ de drift $A_0 = aA_1$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Il doit alors vérifier l'équation suivante :

$$\mathrm{d}X_t = X_t A_1 \mathrm{d}W_t^1 + X_t A_2 \mathrm{d}W_t^2 + X_t(A_1^2 + A_0)\mathrm{d}t$$

et les coordonnées de X vérifient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{1,1} = \frac{1}{2}X_t^{1,1}\mathrm{d}W_t^1 + (\frac{1}{8} + \frac{a}{2})X_t^{1,1}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X_t^{1,2} = \frac{-1}{2}X_t^{1,2}\mathrm{d}W_t^1 + X_t^{1,1}\mathrm{d}W_t^2 + (\frac{1}{8} - \frac{a}{2})X_t^{1,2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X_t^{2,2} = \frac{-1}{2}X_t^{2,2}\mathrm{d}W_t^1 + (\frac{1}{8} - \frac{a}{2})X_t^{2,2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X_t^{2,1} = 0 \end{cases} .$$

Proposition 12.

L'unique solution de cette équation est le processus :

$$X_t = \begin{pmatrix} \sqrt{y_t} & \frac{x_t}{\sqrt{y_t}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_t}} \end{pmatrix} \quad ,$$

avec

$$y_t = e^{W_t^1 + at} \quad \text{et} \quad x_t = \int_0^t y_s \mathrm{d}W_s^2 \quad .$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que ce processus est bien solution de l'équation, en appliquant la formule d'Itô. □

Chapitre IV

Approximation.

S'il est parfois possible d'expliciter l'expression du mouvement brownien, ce n'est en général pas possible. On a donc recours à des approximations.

Soient $A_1, \ldots, A_k, A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{G}$ l'algèbre qu'elle engendre et G le groupe associé. Soit W un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^k$. On notera X la solution de l'équation (II.1) et

$$a_t = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} A_j W_t^j + A_0 t \quad .$$

On construit alors une suite de processus, définis sur $[0, T]$ par :

$$\begin{cases} z_n(0) = id \\ z_n(t) = z_n(t_k^n)\exp(a_t - a_{t_k^n}) \quad \text{avec} \quad t_k^n < t \leq t_{k+1}^n \end{cases} ,$$

où $(t_k^n)_k$ est une partition de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0.

Proposition 13.

La suite de processus $(z_n)_n$ converge presque sûrement vers un mouvement brownien de générateur $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{A_j}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$.

La preuve consiste à montrer que le processus z_n vérifie "presque" l'équation (II.1).

Essayons plutôt de dégager l'idée qui se cache derrière cette construction. Notre première méthode pour construire un mouvement brownien a été de prendre l'exponentielle d'un mouvement brownien dans le groupe de Lie. Cependant, le processus qui en résulte ne vérifie pas toujours notre première définition. Ici, plutôt que de passer à l'exponentielle toute la trajectoire, on prend l'exponentielle des accroissements du mouvement brownien sur l'algèbre. L'image qu'il faudrait avoir est celle d'un roulement sans glissement du groupe de Lie, sur sont algèbre de Lie, le long de la trajectoire brownienne.

Nous allons appliquer cette méthode pour approximer un mouvement brownien dans le groupe $O_3(\mathbb{R})$ avec Scilab. Tout d'abord, il faut simuler un mouvement brownien réel. C'est le but des fonctions `marche(n)` et `brownien(T,n)`. La première crée une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ de `n` pas. La seconde en déduit les valeurs d'un mouvement brownien sur l'intervalle `T` par un changement d'échelle. L'illustration de l'introduction a été produite ainsi.

```
function Y=marche(n)
    Y(1)=0
    for i=2:n+1
        Y(i)=Y(i-1)+2*floor(2*rand())-1
    end
endfunction
```

```
function Z=brownien(T,n)
    l=length(T)
    Y=marche(n)
    for i=1:l
        Z(i)=Y(1+floor(T(i)*n))/sqrt(n)
    end
endfunction
```

L'algèbre de Lie de O_3 est l'ensemble des matrices antisymétriques. Elle est engendrée par les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ces matrices seront notées `A1`, `A2` et `A3` dans Scilab. La fonction `O_3(T,n)` construit alors un mouvement brownien sur le groupe $O_3(\mathbb{R})$, de dérive nulle. Elle retourne trois matrices `M1`, `M2` et `M3`. La j-ième colonne de la matrice `M1` correspond à la première colonne de la matrice X_{t_j}. Les trois colonnes de X_t sont orthogonales et de norme 1. On peut donc représenter graphiquement le mouvement brownien sur $O_3(\mathbb{R})$ en traçant les trajectoires des colonnes sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

```
function [M1,M2,M3]=O_3(T,n)
    l=length(T)
    b1=brownien(T,n)
    b2=brownien(T,n)
    b3=brownien(T,n)
    X=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
    M1=[1;0;0]
    M2=[0;1;0]
    M3=[0;0;1]
    for i=1:l-1
        X=X*expm(A1*(b1(i+1)-b1(i))+A2*(b2(i+1)-b2(i))+A3*(b3(i+1)-b3(i)))
        M1=[M1,X(:,1)]
        M2=[M2,X(:,2)]
        M3=[M3,X(:,3)]
    end
endfunction
```

On peut alors tracer ce mouvement :

```
[M1,M2,M3]=O_3(T,50000);
param3d(M1(1,:),M1(2,:),M1(3,:))
e=gce()
e.foreground=color('blue');
param3d(M2(1,:),M2(2,:),M2(3,:))
f=gce()
f.foreground=color('red');
param3d(M3(1,:),M3(2,:),M3(3,:))
h=gce()
h.foreground=color('green');
```

On obtient alors ce type de graphique.

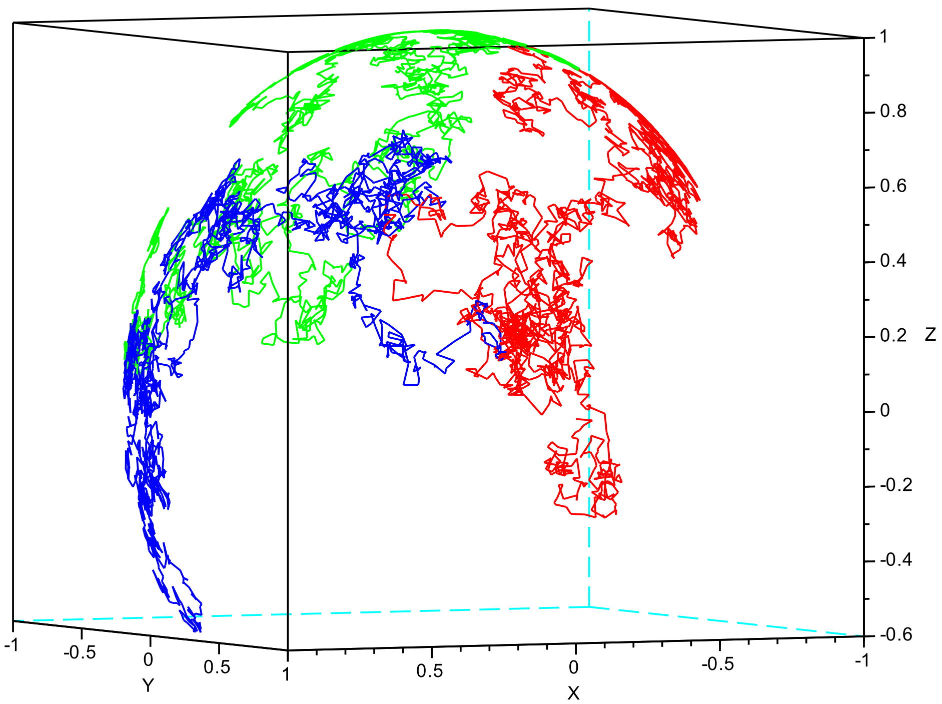


FIGURE IV.1 – Représentation d'un mouvement brownien dans $O_3(\mathbb{R})$.

Conclusion

Au cours de cet exposé, nous avons donc pu définir une notion de mouvement brownien sur un groupe de Lie, qui respecte les propriétés principales du mouvement brownien réel. Le lien avec les EDS nous a permis de montrer l'existence de tel processus. Par ailleurs, cette méthode est intéressante car elle n'est pas spécifique au groupe de Lie. En remplaçant la multiplication par une matrice par l'action d'un champ de vecteur sur une variété, on peut construire la même EDS et ainsi définir un mouvement brownien sur une variété. Pour finir, nous avons donner une méthode constructive qui fourni un mouvement brownien. Cette recette peut-être utilisé pour obtenir des simulations du mouvement brownien sur un groupe de Lie. L'étude du mouvement brownien sur un groupe de Lie ouvre la voie à l'étude du mouvement brownien dans de nombreuses géométries différentes. Cela soulève d'importante question sur les propriétés que va avoir le mouvement en fonction du groupe. Sera-t-il récurrent ? Converge-t-il ? En quel sens ?

Bibliographie

[1] H.P. MACKEAN. *Stochastic integrals*. ACADEMIC PRESS, 1969.

[2] L.C.G. ROGERS et D. WILLIAMS. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2^{me} édition, 2000.

[3] J. FRANCHI et Y. LE JAN. *Hyperbolic Dynamics and Brownian Motions*. version préliminaire, 2012.