Un modèle de dynamique de population et processus de branchement

Lecture dirigée par Mihai Gradinaru, Université de Rennes 1 - ENS Rennes

Baptiste Huguet Kévin Pilet

23 avril 2014

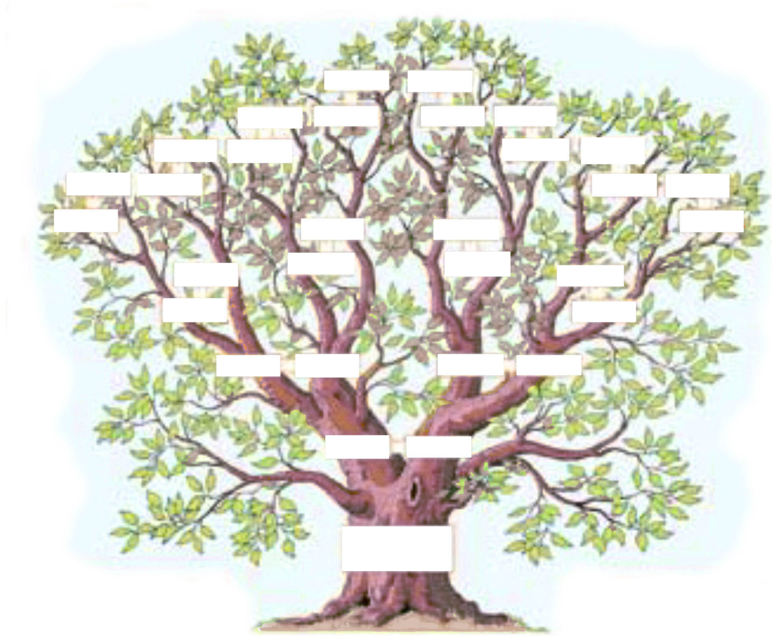

Table des matières

Introduction

L'évolution d'une population et la reproduction sont des phénomènes difficiles à décrire précisément. Cependant, il existe de nombreuses modélisations mathématiques, plus ou moins complexes, qui permettent d'en appréhender, chacune à leur manière, les différents aspects. Le modèle le plus naïf est le "modèle de *Maltus*" (1798). C'est un modèle discret. Si on note N_i la population à l'instant t_i, alors on a la relation

$$N_{i+1} = N_i + rN_i$$

où r s'interprète comme le taux de d'accroissement de la population (différence entre le taux de fécondité en le taux de mortalité). Ce modèle prédit une évolution exponentielle de la population, $N_i = N_0(1+r)i$.

Un des principaux problème de ce modèle, c'est de ne pas prendre en compte les différents individus composant la population étudiée. Pour cela il faut faire appel aux probabilités, comme à travers les processus de branchement.

1 Le processus de branchement

1.1 Définition

Un processus de branchement est un modèle de population probabiliste discret. On considère une population qui évolue de génération en génération. On note Z_n la taille de la n-ième génération. A chaque génération, chaque individu i engendre une famille d'individu de la génération suivante, de taille X_i.

Alors l'évolution de la population suit un processus de branchement si les taille de chaque famille forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes identiquement distribuées.

Ce modèle n'est pas spécifique à la reproduction sexuée et peut aussi décrire la croissance du nombre de neutrons dans un réacteur nucléaire.

La figure 1 est est un exemple de processus de branchement avec $Z_0 = 1$.

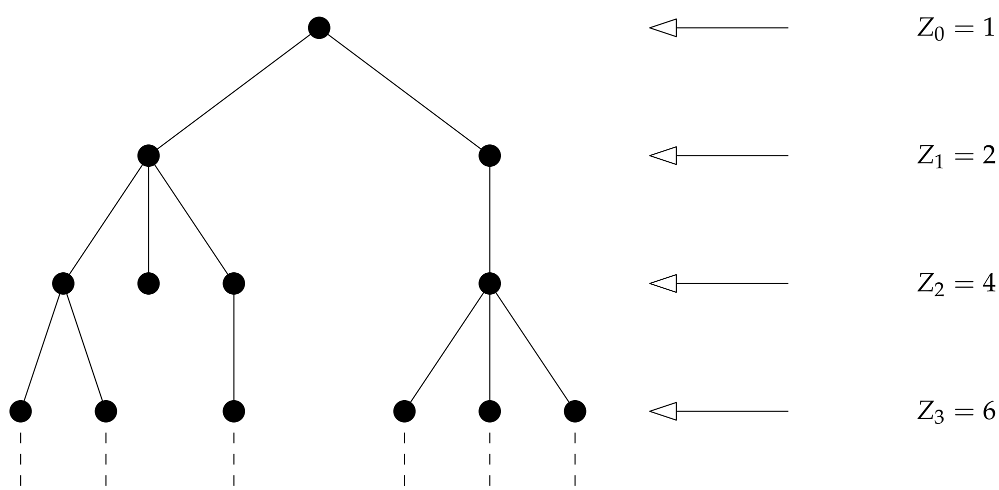

FIGURE 1 – Arbre généalogique d'un processus de branchement.

Pour suivre la dynamique de population prédite par notre modèle, nous devons déterminer la suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'outil adapté pour l'étude d'un processus de branchement est la fonction génératrice.

1.2 Fonction génératrice

Définition 1 (Fonction génératrice)
Soit X une variable aléatoire à support inclus dans $\mathbb{N}$. On définit sa fonction génératrice G par :

$$s \mapsto \mathbb{E}[s^X]$$

Usuellement, l'ensemble de définition de G est le disque $\mathcal{D}(0,1)$.

On remarque que $G(1) = \mathbb{E}[1] = 1$.

La fonction génératrice caractérise complètement la loi de sa variable aléatoire. Elle est aussi appelée "fonction génératrice des probabilités".

Théorème 1
Soit X une variable aléatoire à support inclus dans $\mathbb{N}$ et soit G sa fonction génératrice. Alors G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1[$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration 1
On a $G : s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n)$. G est donc la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. G est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1[$. Par propriété des série entière, pour tout entier n, pour tout s dans $[0,1[$

$$G^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1)s^{k-n}\mathbb{P}(X = k)$$

On applique l'égalité en 0. Tous les termes s'annulent, sauf un (pour $k = n$). Ainsi, on obtient : $G^{(n)}(0) = n(n-1)\ldots...(n-n+1)\mathbb{P}(X = n)$. D'où le résultat.

La fonction génératrice vérifié une seconde propriété importante :

Théorème 2 (Lien avec l'espérance et la variance)
Soit X une variable aléatoire à support inclus dans $\mathbb{N}$ et soit G sa fonction génératrice.
Alors X a une espérance finie si et seulement si G admet une dérivée à gauche en 1.
Dans ce cas, on a :

$$G'(1) = \mathbb{E}[X]$$

Alors X a une variance finie si et seulement si G admet une dérivée seconde à gauche en 1.
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{var}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Démonstration 2
Pour l'espérance :
Pour tout s dans $[0, 1]$, on a :

$$\frac{G(1) - G(s)}{1 - s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - s^n}{1 - s} \mathbb{P}(X = n)$$

Or pour tout n, $\dfrac{1 - s^n}{1 - s} = 1 + s + s^2 + ... + s^{n-1}$. C'est donc une fonction croissante en s. De plus $\lim\limits_{s \to 1^-} \dfrac{1 - s^n}{1 - s} = n$. D'après le théorème de convergence monotone (on intègre sur $\mathbb{N}$ par rapport à la loi de X), on a :

$$\lim_{s \to 1^-} \frac{G(1) - G(s)}{1 - s} = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}[X]$$

Ce qui démontre l'équivalence.

Pour la variance :
En dérivant G deux fois, pour tout s dans $[0, 1[$, on obtient :

$$G''(s) = \mathbb{E}[X(X-1)s^{X-2}]$$

En $s = 1$: $G''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)]$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}[X(X-1)+X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2\end{aligned}$$

Théorème 3 (Convexité)
La fonction génératrice est convexe sur $[0,1]$.

Démonstration 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $s \in [0,1[$, on a : $G''(s) = \mathbb{E}[X(X-1)s^{X-2}]$ Donc G'' est positive sur $[0,1[$. Ainsi G est convexe sur $[0,1]$.

1.3 Théorèmes principaux

Nous allons nous intéresser à $Z_0, Z_1, \ldots$
On défini donc $G_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n})$, la fonction génératrice de Z_n, avec $s \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$ et $Z_n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4 (Fonction génératrice de Z_n)
Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $\forall s \in [0,1[$

$$G_{m+n}(s) = G_m(G_n(s)) = G_n(G_m(s))$$

et

$$G_n(s) = G(G(\ldots(G(s))\ldots))$$

Démonstration 4
Chaque membre de la génération $(m+n)$ a un unique ancêtre dans la génération n.
Soit X_i le nombre de personnes de la génération $(m+n)$ qui ont le même ancêtre à la génération n.
Donc $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $Z_{m+n} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{Z_n}$

De plus $X_1, X_2, \dots, X_{Z_n}$ sont indépendantes et identiquement distribuées

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z_n = i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = Z_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,$

$$\begin{aligned}
G_{m+n}(s) &= \mathbb{E}[s^{Z_{m+n}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Z_{m+n}} | Z_n]] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{Z_{m+n}} | Z_n = i] \mathbb{P}(Z_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1 + X_2 + \dots X_{Z_n}}] \mathbb{P}(Z_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1} s^{X_2} \dots s^{X_{Z_n}}] \mathbb{P}(Z_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \mathbb{E}[s^{X_2} [\dots \mathbb{E}[s^{X_{Z_n}}] \mathbb{P}(Z_n = i) \quad \text{indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}]^{Z_n} \mathbb{P}(Z_n = i) \quad \text{identiquements distribuées} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} G_{X_1}(s)^{Z_n} \mathbb{P}(Z_n = i) \\
&= G_n(G_{X_1}(s))
\end{aligned}$$

Et de plus $G_{X_1}(s) = G_m(s)$

Donc $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ G_{m+n}(s) = G_n(G_m(s))$

De même, on peut obtenir $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ G_{m+n}(s) = G_m(G_n(s))$

On a donc aussi $\forall n \in \mathbb{N}, G_n(s) = G_{(n-1)+1}(s) = G(G_{n-1}(s))$avec$G = G_1$
et donc, on obtient par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, G_n(s) = G(G(\dots G(s) \dots))$
(G est itérée n fois)

Théorème 5 (Espérance et variance de Z_n)
Soient $\mu = \mathbb{E}[Z_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{var}(Z_1)$,alors :
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(Z_n) = \begin{cases} n\sigma^2 & si \quad \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n-1)\mu^{n-1}}{(\mu-1)} & si \quad \mu \neq 1 \end{cases}$$

Démonstration 5
Pour l'espérance :

Soit $\mu = \mathbb{E}[Z_1]$,

$\forall n \in \mathbb{N}, G_n(s) = G(G_{n-1}(s))$
On dérive : $\forall n \in \mathbb{N}, G'_n(s) = G'(G_{n-1}(s))G'_{n-1}(s)$

En utilisant le théorème 2, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, G'_n(1) = \mathbb{E}[Z_n]$.
De plus $G_n(1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, G'_n(1) &= G'(G_{n-1}(1))G'_{n-1}(1) \\ \mathbb{E}[Z_n] &= G'(1)\mathbb{E}[Z_{n-1}] \\ \mathbb{E}[Z_n] &= \mu\mathbb{E}[Z_{n-1}] \end{aligned}$$

Par récurrence on peut donc montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$

Pour la variance :

Soit $\sigma^2 = \mathrm{var}(Z_1)$

On dérive deux fois $G_n(s), \forall n \in \mathbb{N}$, :
$G'_n(s) = G'(G_{n-1}(s))G'_{n-1}(s)$
en $s = 1$: $G'_n(1) = G'(1)G'_{n-1}(1)$
$G''_n(s) = G''(G_{n-1}(s))(G'_{n-1}(s))^2 + G'(G_{n-1}(s))G''_{n-1}(s)$

$$\begin{aligned} \text{en } s = 1 : G''_n(1) &= G''(G_{n-1}(1))(G'_{n-1}(1))^2 + G'(G_{n-1}(1))G''_{n-1}(1) \\ &= G''(1)(G'_{n-1}(1))^2 + G'(1)G''_{n-1}(1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{var}(Z_n) &= G_n''(1) + G_n'(1) - (G_n'(1))^2 \\
&= G''(1)(G_{n-1}'(1))^2 + G'(1)G_{n-1}''(1) + G'(1)G_{n-1}'(1) - (G'(1)G_{n-1}'(1))^2 \\
&= (G_{n-1}'(1))^2(G''(1) - G'(1)^2 + G'(1) - G'(1)) + G'(1)G_{n-1}''(1) + G'(1)G_{n-1}'(1) \\
&= G_{n-1}'(1)^2(G''(1) + G'(1) - G'(1)^2) \\
&\quad - G_{n-1}'(1)^2G'(1) + G'(1)G_{n-1}''(1) + G'(1)G_{n-1}'(1) \\
&= G_{n-1}'(1)^2\mathrm{var}(Z_1) + G'(1)(-G_{n-1}'(1)^2 + G_{n-1}''(1) + G_{n-1}'(1)) \\
&= G_{n-1}'(1)^2\sigma^2 + G'(1)\mathrm{var}(Z_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}[Z_{n-1}]^2\sigma^2 + \mathbb{E}[Z_1]\mathrm{var}(Z_{n-1}) \\
&= \mu^{2(n-1)}\sigma^2 + \mu\mathrm{var}(Z_{n-1})
\end{aligned}
$$

si $\mu = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{var}(Z_n) = \sigma^2 + \mathrm{var}(Z_{n-1})$
on obtient donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{var}(Z_n) = n\sigma^2$

si $\mu \neq 1$ alors on pose notre hypothèse de récurrence :

$\mathcal{H}(n)$: "$\mathrm{var}(Z_n) = \dfrac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1}$"
$\mathcal{H}(1)$ est vrai : $\mathrm{var}(Z_1) = \dfrac{\sigma^2(\mu - 1)\mu^0}{\mu - 1} = \sigma^2$

Supposons $\mathcal{H}(k)$ vrai, montrons que $\mathcal{H}(k+1)$ est vrai :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Z_{k+1}) &= \mu^{2(k+1-1)}\sigma^2 + \mu\,\mathrm{var}(Z_k) \\
&= \mu^{2k}\sigma^2 + \frac{\mu(\sigma^2(\mu^k - 1)\mu^{k-1})}{\mu - 1} \\
&= \frac{\mu^{2k}\sigma^2(\mu - 1)}{\mu - 1} + \frac{(\sigma^2(\mu^k - 1)\mu^k}{\mu - 1} \\
&= \frac{\mu^k\sigma^2((\mu - 1)\mu^k + (\mu^k - 1)}{\mu - 1} \\
&= \frac{\sigma^2(\mu^{k+1} - \mu^k + \mu^k - 1)\mu^k}{\mu - 1} \\
&= \frac{\sigma^2(\mu^{k+1} - 1)\mu^k}{\mu - 1}
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vrai.

On a donc montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{var}(Z_n) = \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{(\mu - 1)}$$

1.4 Comportement asymptotique

Grâce ces fonctions, nous pouvons aussi prévoir l'extinction ou non d'une population.

Proposition 6 (Probabilité d'extinction)

$$\mathbb{P}(\text{extinction}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Démonstration 6

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{Z_n = 0\}$. Si la population s'est éteinte à la n-ième génération, alors elle est aussi éteinte à la $(n+1)$-ième génération. Donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, B_n = A_{n+1} - A_n$. Les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont disjoints et vérifient :

$$(\bigcup_n B_n) \cup A_0 = \bigcup_n A_n$$
$$\mathbb{P}((\bigcup_n B_n) \cup A_0) = \mathbb{P}(\bigcup_n A_n)$$

Pour tout N dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}((\bigcup_{n=0}^{N} B_n) \cup A_0) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n)$$
$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n) = \mathbb{P}(A_0) + (\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n)$$
$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n) = \mathbb{P}(A_0) + (\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)$$
$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n) = \mathbb{P}(A_N)$$

En passant à la limite sur N, on obtient :

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Or $\{\text{extinction}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{Z_n = 0\}$ donc on a :

$$\mathbb{P}(\text{extinction}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Théorème 7 (Condition d'extinction)
Soit $\mu = \mathbb{E}[Z_1]$ et $\sigma^2 = \text{var}(Z_1)$,
On a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(\text{extinction}) = a$$

où a est la plus petite variable positive tel que $G(a) = a$

De plus,
– si $\mu < 1$ alors $a = 1$
– si $\mu > 1$ alors $a < 1$
– si $\mu = 1$ alors $a = 1$ si $\sigma^2 > 0$

Démonstration 7
On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n, a_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, qui converge vers a.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = G_n(0) = G(G_{n-1}(0)) = G(a_{n-1})$$

On fait tendre n vers l'infini et on a par continuité de G :

$$a = G(a)$$

On sait que G est croissante sur $[0,1]$.
Soit b une solution positive de $s = G(s)$, montrons que $a \leq b$:
$G(0) \leq G(b)$
Or $G(0) = a_1$ et $G(b) = b$
Donc $a_1 = G(0) \leq G(b) = b$
Ensuite, $a_2 = G(a_1) \leq G(b) = b$

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b$
Donc lorsque n tend vers l'infini, on obtient $a \leq b$
Donc a est bien la plus petite solution positive de l'équation $G(s) = s$.
En particulier, $a \leq 1$ car $G(1) = 1$.

Ensuite, la fonction génératrice G est convexe sur $[0,1]$. On peut vérifier que l'équation $G(s) = s$ n'a que deux solution sur $[0,1]$, $s = a$ et $s = 1$. Ce sont les deux points d'intersections avec la droite $y = s$.
De plus la fonction G sera toujours au dessus des ses tangentes et $G(0) \geq 0$.
Donc $a \neq 1$ si la tangente de G en 1 est inférieur à la droite $y = s$ sur $[0,1]$.
Donc cette tangente doit avoir une pente supérieur à 1, donc on doit avoir $G'(1) > 1$.
A l'inverse, $a = 1$ si la tangente de G en 1 est supérieur à la droite $y = s$ sur $[0,1]$. Donc cette tangente doit avoir une pente inférieur à 1, donc on doit avoir $G'(1) < 1$.
Si $\mu = 1$,
si $\sigma^2 = 0$, alors $X = \mathbb{E}(X)$ donc $\forall n \neq 1, \mathbb{P}(k = n) = 0$ et si $n = 1, \mathbb{P}(k = n) = 1$
Donc, $\forall s \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(k = n)s^k \\ &= \mathbb{P}(k = 1)s \\ &= s \end{aligned}$$

Donc $a = 0$ est la plus petite valeur positive vérifiant $G(s) = s$.
Si $\sigma^2 > 0$ alors G ne sera pas la droite $y = s$ et donc d'après ce qu'on a vu avant les courbes $y = G(s)$ et $y = s$ ne se coupent qu'en 1 seul point sur $[0,1]$ et $G(1) = 1$ donc $a = 1$.

S'il n'y a pas extinction, on a donc : $\mu > 1$. On peut montrer que

$$\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} Z_n = \infty | \text{non extinction}) = 1$$

Nous souhaitons donc avoir une idée de la forme de Z_n lorsque n tend vers l'infini.
On défini donc $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{Z_n}{\mathbb{E}[Z_n]} = Z_n \mu^{-n}$

A partir de l'expression de l' espérance de Z_n et de sa variance, on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}$, :
$\mathbb{E}(W_n) = \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{\mathbb{E}[Z_n]=1}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(W_n) &= \operatorname{var}(Z_n)(\mu^{-n})^2 \\
&= \frac{\sigma^2(1-\mu^{-n})}{(\mu^2-\mu)} \to \sigma^2/(\mu^2-\mu) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

(car $\mu > 1$ donc $\mu^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$)

Mais la limite W de W_n n'est pas trivial, donc pour l'étudier on va définir :

$$\forall n \in \mathbb{N} : g_n(s) = \mathbb{E}[s^{W_n}]$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N},\ g_n(s) &= \mathbb{E}(s^{Z_n}\mu^{-n}) \\
&= G_n(s^{\mu^{-n}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a aussi, } \forall n \in \mathbb{N}, : g_n(s) &= G(G_{n-1}(s^{-n}) \\
&= G(G_{n-1}((s^{\frac{1}{\mu}})^{-(n-1)})) \\
&= G(g_{n-1}(s^{\frac{1}{\mu}}))
\end{aligned}$$

On a : $W_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} W \quad$ et $\quad g_n(s) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(s) = \mathbb{E}(s^W)$.

$$\text{On a donc : } g(s) = G(g(s^{\frac{1}{\mu}}))$$

2 Exemple de processus de branchement : le processus géométrique

2.1 Fonction génératrice

On considère un processus de branchement tel que la taille de chaque famille suive une loi géométrique de paramètre q ($\mathbb{P}(X=k) = qp^k$, pour k$\in$ $\mathbb{N}$). On note Z_n de taille de la n-ième génération et on suppose que $Z_0 = 1$.
On calcule pour commencer G, la fonction génératrice de Z_1. Comme Z_0=1 alors la génération 1 n'est composée que d'une seule famille. Pour tout $s \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{E}[s^{X_1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k q p^k \\ &= q \sum_{k=0}^{\infty} (ps)^k \\ &= \frac{q}{1-ps} \end{aligned}$$

On procède ensuite par récurrence. L'initialisation est déjà faite car par définition $G_1 = G$.

Dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$, on a pour tout s dans $[0,1]$, $G(s) = \dfrac{1}{2-s}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}.$$

On suppose que l'hypothèse est vérifiée au rang n. On a alors :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= G(G_n(s)) \\
&= \frac{1}{2 - G_n(s)} \\
&= \frac{1}{2 - \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns}} \\
&= \frac{(n+1)-ns}{2n+2-2ns-n+(n+1)s} \\
&= \frac{(n+1)-ns}{(n+1)+1-(n+1)s}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

Dans le cas où $p \leq q$, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_n(s) = \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{(n-1)} - q^{(n-1)}]}{p^{(n+1)} - q^{(n+1)} - ps(p^n - q^n)}.$$

On suppose l'hypothèse vérifiée au rang n. On a alors :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \frac{q}{1 - p\dfrac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)}} \\
&= \frac{q[p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n) - pq[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]} \\
&= \frac{q[p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)]}{p^{n+1} - q^{n+1} - qp^{n+1} + pq^{n+1} - ps(p^n - q^n + qp^n - pq^n)} \\
&= \frac{q[p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)]}{p^{n+2} - q^{(n+2)} - ps(p^{n+1} - q^{n+1})}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. En posant $\rho = \frac{p}{q}$, on montre alors que

$$G_n(s) = \begin{cases} \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns} & \text{si} \quad q = p = \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{[\rho^n - 1 - \rho s(\rho^{n-1}-1)]}{\rho^{n+1} - 1 - \rho s(\rho^n - 1)} & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

Nous sommes donc capable de caractériser la loi de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut ainsi s'intéresser au comportement de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, notamment la probabilité d'extinction totale et la probabilité que la taille de la population diverge sachant que l'extinction n'a pas lieu.

2.2 Probabilité d'extinction

On s'intéresse à la probabilité d'extinction.
On a vu que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$.
Dans notre cas, on obtient

$$G_n(0) = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{si} \quad q = p = \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{\rho^n - 1}{\rho^{n+1} - 1} & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

D'après la proposition 6, on a le résultat suivant :

$$\mathbb{P}(\text{extinction}) = \begin{cases} 1 & si \quad q \geq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{q}{p} & si \quad q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2.3 Probabilité d'extinction en temps fini

On a montré que si $q \leq \frac{1}{2}$ alors la population s'éteint presque sûrement. Mais peut-on cette extinction se produit-elle en temps fini ?
On note $T = \min\{n : Z_n = 0\}$. On s'intéresse à $\mathbb{P}(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement contraire à $\{T = n\}$ est l'union de $\{Z_n \neq 0\}$ et $\{Z_{n-1} = 0\}$.

On a alors : $\mathbb{P}(T = n) = 1 - \mathbb{P}(Z_n \neq 0 \,\text{ou}\, Z_{n-1} = 0)$

$$\mathbb{P}(T = n) = 1 - \mathbb{P}(Z_n \neq 0) - \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)$$
$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)$$
$$\mathbb{P}(T = n) = G_n(0) - G_{n-1}(0)$$

Dans le cas où $q = \frac{1}{2}$, d'après la partie précédente, alors on montre que

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Dans ce cas, T n'admet pas de moment d'ordre 1 fini, alors même que l'extinction est presque sûre :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \infty.$$

Dans le cas où $q \neq p$, on montre que

$$\mathbb{P}(T = n) = \rho^{n-1} \frac{(\rho)^2}{(\rho^{n+1} - 1)(\rho^n - 1)}.$$

Puis on fait une disjonction de cas sur ρ :

$$\mathbb{P}(T = n) \sim \begin{cases} (\rho - 1)^2 \rho^{n-1} & si \quad \rho < 1 \\ \\ (\rho - 1)^2 (\frac{1}{\rho})^{n+2} & si \quad \rho > 1 \end{cases}$$

Dans les deux cas, T admet une espérance finie.

3 Modèles plus avancés

3.1 Dépendance en âge

Un des défaut du processus de branchement tel que nous l'avons présenté, est son caractère discret. Il existe un modèle plus général qui permet de prendre en compte le fait que deux individu d'une même génération n'engendre pas de famille simultanément. Pour modéliser ceci, on introduit une nouvelle variable aléatoire, l'âge. On suppose que la famille des âges est mutuellement indépendante identiquement distribuée de densité f_T et indépendante de la famille des tailles de famille. De plus l'âge est continue, positif.

On note $Z(t)$ le nombre d'individu à l'instant t, et $G_t(s) = \mathbb{E}(s^{Z(t)})$ la fonction génératrice de $Z(t)$. La fonction génératrice dépend du temps. On suppose de plus que $Z(0) = 1$: il y a un unique individu initial. Chaque individu vit pendant une période, égale à son âge, avant d'être remplacé par la famille qu'il engendre. On note T l'âge de l'individu initial. Tout comme dans le modèle discret, on cherche à obtenir une expression de G_t afin de déterminer $Z(t)$.

Théorème 8
Pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, pour tout s dans $[0, 1]$, on a :

$$G_t(s) = \int_0^t G(G_{t-u}(s)) f_T(u) \mathrm{d}u + \int_t^\infty s f_T(u) \mathrm{d}u$$

Démonstration 8
On à l'égalité suivante :

$$G_t(s) = \mathbb{E}[s^{Z(t)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Z(t)}|T]] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{E}[s^{Z(t)}|T = u] f_T(u) \mathrm{d}u.$$

Si $T = u$, à l'instant u l'individu initial meurt et est remplacé par N descendants. N est une variable aléatoire de fonction génératrice G. Chacun des N individus engendrent des famille comme leur ancêtre l'a fait. La mort de l'ancêtre a pour effet de remplacer le processus par une somme de N copies du processus, décalé dans le temps de u.

- Si $u > t$, alors $Z(t) = 1$ et donc pour tout s dans $[0,1], \mathbb{E}[s^{Z(t)}|T = u] = s$.
- Si $u < t$, alors $Z(t) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ une somme de N copie indépendantes de $Z(t-u)$. De la même manière que dans la démonstration du théorème 4, on obtient $\mathbb{E}[s^{Z(t)}|T = u] = G(G_{t-u}(s))$.

En utilisant l'égalité, on obtient le résultat.

Ce théorème est plus intéressant pour sa démonstration que pour le résultat qu'il apporte. Il est bien souvent impossible de calculer explicitement la fonction G_t. Cependant, on peut quand même en tirer quelques information intéressante, notamment sur l'espérance.

Proposition 9 Espérance de Z(t)
Soit t dans $\mathbb{R}_+$, on note $m(t) = \mathbb{E}[Z_t]$. Sous réserve d'existence, m vérifie l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad m(t) = \mu \int_0^t m(t-u) f_T(u) \mathrm{d}u + \int_0^\infty f_t(u) \mathrm{d}u$$

avec $\mu = G'(1)$.

Démonstration 9
En utilisant le théorème 2, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{E}[Z_t] = \lim_{s \nearrow 1} \frac{\partial G_t}{\partial s}(s).$$

Par théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\mathbb{E}[Z_t] = \lim_{s \nearrow 1} \int_0^t \frac{\partial G}{\partial s}(G_{t-u}(s)) \frac{\partial G_{t-u}}{\partial s}(s) f_T(u) \mathrm{d}u + \int_t^\infty f_T(u) \mathrm{d}u.$$

On conclut avec le théorème de convergence dominée car

$$\lim_{s \nearrow 1} \frac{\partial G}{\partial s}(G_{t-u}(s)) = \lim_{s \nearrow 1} \frac{\partial G}{\partial s}(s) = \mu \quad \text{et} \lim_{s \nearrow 1} \frac{\partial G_{t-u}}{\partial s}(s) = m(t-u)$$

3.2 Distribution exponentielle de l'âge

Dans le cas particulier où f_T est la densité d'une loi exponentielle, il est possible de déterminer une équation différentielle plus simple, vérifiée par G_t.

Théorème 10 (Distribution exponentielle de l'âge)
On suppose que la densité de l'âge est : $f_T : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.
Alors la fonction G_t vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} G_t(s) = \lambda [G(G_t(s)) - G_t(s)].$$

Démonstration 10
On part de l'équation du théorème 8 et on dérive par rapport à t. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $s \in [0,1]$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} G_t(s) = G(G_0(s)) f_T(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(G_{t-u}(s)) f_T(u) \mathrm{d}u - s f_t(t)$$

Or $G_0(s) = s$ et $\frac{\partial}{\partial t} G(G_{t-u}(s)) = -\frac{\partial}{\partial u} G(G_{t-u}(s)$.
Donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} G_t(s) = (G(s) - s) f_T(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} G(G_{t-u}(s)) f_T(u) \mathrm{d}u$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_t(s) = (G(s) - s) f_T(t) - [G(G_{t-u}(s)) f_T(u)]_{u=0}^t + \int_0^t G(G_{t-u}(s)) \frac{\partial}{\partial u} f_T(u) \mathrm{d}u$$

En utilisant l'expression de f_T, on peut simplifier :

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(s) = (G(s) - s)f_T(t) - G(G_0(s))f_T(t) + G(G_t(s))f_T(0) - \lambda \int_0^t G(G_{t-u}(s))f_T(u)\mathrm{d}u$$
$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(s) = -sf_T(t) + G(G_t(s)) - \lambda \int_0^t G(G_{t-u}(s))f_T(u)\mathrm{d}u$$

D'après le théorème 8, on a :

$$\int_0^t G(G_{t-u}(s))f_T(u)\mathrm{d}u = G_t(s) - s\int_0^\infty G(G_{t-u}(s))f_T(u)\mathrm{d}u$$

Pour finir, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(s) = \lambda[G(G_t(s)) - G_t(s)].$$

Pour des ces particuliers de G, on peut résoudre complètement cette équation.

3.3 Modélisation de la division cellulaire

On considère une culture de cellule. A l'instant t=0, il n'y a qu'une seule cellule ($Z(0) = 1$). On suppose que l'âge suit une loi $\mathcal{E}(1)$. Chaque cellule peut soit mourir, soit se dupliquer, de manière équiprobable. On a :

$$\forall s \in [0,1], G(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2).$$

L'équation différentielle définissant G_t s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(s) = \frac{1}{2}(G_t(s) - 1)^2.$$

Proposition 11 (Expression de G_t)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall s \in [0,1], G_t(s) = \frac{2s + t(1-s)}{2 + t(1-s)}$$

Démonstration 11
La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(t-1)^2$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale.

La fonction constante égale à 1 est solution de l'équation, donc si une solution passe par la valeur 1, c'est la fonction constante.

On considère donc φ une solution, et on suppose qu'elle ne prend pas la valeur 1. On peut alors écrire :

$$\frac{\varphi'}{(\varphi(t)-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\varphi(t)-1} - \frac{1}{\varphi(0)-1} = -\frac{t}{2}$$

Or $\forall s \in [0,1]$, $G_0(s) = \int_0^\infty s\lambda e^{-\lambda t} du = s$

$$\frac{1}{\varphi(t)-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{t}{2}$$

$$\frac{1}{\varphi(t)-1} = \frac{2+t(1-s)}{2(s-1)}$$

$$\varphi(t) = \frac{2s+t(1-s)}{2+t(1-s)}$$

Par unicité, on a le résultat.

A partir de la fonction génératrice, on peut remonter aux lois des $Z(t)$. On en déduit les résultats suivants sur le processus :

Proposition 12 (Loi de $Z(t)$)
$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z(t) = n) = \begin{cases} \frac{t}{2+t} & \text{si} \quad n = 0 \\ \frac{4t^{n-1}}{(2+t)^{n+1}} & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration 12
Le calcul des dérivées successives de G se fait assez facilement.
On montre que $G_t'(s) = \frac{4}{[2+t(1-s)]^2}$. Alors on a par récurrence, on a

$$\frac{4t^{n-1}n!}{[2+t(1-s)]^{n+1}}$$

On évalue en 0.

Proposition 13 (Espérance et Variance de $Z(t)$)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{E}[Z(t)] = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(Z(t)) = t$$

Démonstration 13
Pour tout t dans $\mathbb{R}_+, s \mapsto G_t(s)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} G_t(s) = \frac{4}{[2+t(1-s)]^2}.$$

Elle admet donc en 1 une dérivée à gauche finie qui vaut $\mathbb{E}[Z(t)] = 1$. De même

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} G_t(s) = \frac{8t}{[2+t(1-s)]^3}.$$

Ainsi $\mathrm{var}(Z(t)) = t$.

Proposition 14 (Fonction de répartition de $Z(t)$)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{on a :} \quad \mathbb{P}(Z(t) \geq k) = \frac{2t^{k-1}}{(2+t)^k}$$

Démonstration 14
Soit k dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(Z(t) \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{4t^{n-1}}{(2+t)^{n+1}}$$
$$\mathbb{P}(Z(t) \geq k) = \frac{4}{(2+t)^2} \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{4t^n}{(2+t)^n}$$
$$\mathbb{P}(Z(t) \geq k) = \frac{4}{(2+t)^2} \frac{(\frac{t}{2+t})k-1}{1-\frac{t}{2+t}}$$
$$\mathbb{P}(Z(t) \geq k) = \frac{2t^{k+1}}{(2+t)^k}$$

On n'a pas calculer la fonction de répartition F à proprement parler mais $1 - F$. C'est parfois plus facile à manier.

On peut maintenant s'intéresser aux comportements asymptotiques de notre modèles.

Proposition 15 (Comportement asymptotique)
La population s'éteint presque sûrement.

De plus, conditionnellement à l'événement "$\{Z(t) > 0\}$", $\frac{Z(t)}{t}$ converge en loi vers $\mathcal{E}(2)$.

Démonstration 15
On montre que $\lim t \to \infty G_t(o) = 1$.

$$\{\text{extinction}\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{Z(t) = 0\}$$

$$\text{Par inclusion}, \mathbb{P}(\{\text{extinction}\}) \geq \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) = 0\}.$$

On peut calculer cette dernière quantité comme dans la démonstration de la proposition 6. C'est 1.
Une probabilité étant toujours inférieure à 1, on a : $\mathbb{P}(\{\text{extinction}\}) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = \mathbb{P}(Z(t) \geq tx | Z(t) > 0)$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = \frac{\mathbb{P}(Z(t) \geq tx \quad \text{et} \quad Z(t) > 0)}{\mathbb{P}(Z(t) > 0)}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = \frac{\mathbb{P}(Z(t) \geq tx)}{\mathbb{P}(Z(t) > 0)}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = \frac{2t^{\lfloor tx \rfloor}}{(2+t)^{\lfloor tx \rfloor + 1}} \frac{2+t}{2}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = \left(\frac{t}{2(2+t)}\right)^{\lfloor tx \rfloor}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = e^{-\lfloor tx \rfloor \ln 2(1+\frac{2}{t})}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x \,|\, Z(t) > 0\right) = e^{-\lfloor tx \rfloor \ln 2} e^{-\lfloor tx \rfloor \ln (1+\frac{2}{t})}$$

$$\text{Ainsi} \quad \mathbb{P}\left(\frac{Z(t)}{t} \geq x | Z(t) > 0\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} = e{-}2x$$

En notant F la fonction de répartition de $\frac{Z(t)}{t}$ conditionnellement à "$\{Z(t) > 0\}$", on a montré que $F(x) = 1 - e{-}2x$ si $x > 0$. On montre facilement que F est nulle si $x \leq 0$. C'est donc la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(2)$.

3.4 Modèle de *Daley*

Le modèle de Daley sert à décrire le mécanisme de reproduction d'une population sexuée. On définit F_n le nombre de femelles et M_n le nombre de mâles à la génération n et Z_n le nombre de couples de cette même génération. On définit, ensuite, le nombre de naissances donné par un couple (tout les couples suivent la même loi de reproduction G) par : X le nombre de femelles et Y le nombre de mâles. X et Y sont indépendantes de l'indice de génération.

Définition 2
Soit une suite $(X_{n,i}, Y_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon le loi du couple (X, Y), à valeurs entières.
Soit $L : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, à valeurs entières, telle que :

$$\forall(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ L(x, y) \leq xy.$$

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\begin{cases} Z_0 = N \quad (N \geq 1) & \\ (F_{n+1}, M_{n+1}) = (0, 0) & \text{si} \quad Z_n = 0, \\ (F_{n+1}, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{Z_n} (X_{n,i}, Y_{n,i}) & \text{sinon} \\ Z_n = L(F_n, M_n) & n \geq 1 \end{cases}$$

Alors $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit un modèle de *Daley*.

On sait que $G(z_1, z_2) = \mathbb{E}(z_1^X z_2^Y)$ avec G la fonction génératrice du couple (X, Y)

On a donc $\mathbb{E}(z_1^{F_{n+1}} z_2^{M_{n+1}} | Z_n = j) = (G(z_1, z_2))^j$, avec $j \in \mathbb{N}$

Exemple de loi de reproduction :

Soit $T = X + Y$ le nombre d'individu dans la portée d'un couple donné.
Soit $H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ sa fonction génératrice.
Soit $(p, q) \in (]0, 1[)^2$, p est la probabilité que le nouveau-né soit une femelle et donc $q = 1 - p$ la probabilité que ce soit un mâle donc :

$$G(z_1, z_2) = H(pz_1 + qz_2)$$

De plus, on suppose que le nombre de mâles et de femelles d'une portée sont indépendants donc :

$$G(z_1, z_2) = G_X(z_1)G_Y(z_2)$$

Exemples (cas particulier de la définition) :

- Soit $L(x,y) = x \min(1,y)$,on a donc :

$$Z_n = \begin{cases} F_n & si\, M_n \geq 1 \\ 0 & si\, M_n = 0 \end{cases}$$

  Ce modèle représente une situation de promiscuité totale des individus et un pouvoir reproductif illimité des mâles.

  Si le nombre de mâles est 3 et le nombres de femelles est 5 alors le nombre de couples sera 5

- Soit $L(x,y) = \min(x, dy)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$,on a donc :

$$Z_n = \begin{cases} F_n & si\, dM_n \geq F_n \\ dM_n & sinon \end{cases}$$

  Ce modèle est appelé le modèle des couples fidèles.

  Si $d = 2$ alors 1 mâle peut avoir jusqu'à 2 femelles.
  Si on a 1 femelle et 1 mâle, on aura 1 couple.
  Si on a 2 femelles et 1 mâle, on aura 2 couples.
  Si on a 3 femelles et 1 mâle, on aura 2 couples.
  Si on a 3 femelles et 2 mâle, on aura 3 couples.

Conclusion

Le processus de branchement est donc un modèle de dynamique de population qui permet d'obtenir des résultats asymptotiques assez intéressants.

Le processus discret peut-être amélioré en ajoutant une variable aléatoire l'âge. Mais les calculs de ce modèle continu sont souvent impossibles à réaliser.

Le processus de branchement que nous avons étudié n'est pas un modèle parfait dans la mesure où il ne prédit que deux types d'évolution extinction ou explosion. Il ne modélise de mécanisme de rétroaction comme dans les système de *Lotka-Voltera*. Cependant, il existe d'autres versions, toujours plus complexes, qui permettent de modéliser, entre autre ces effets.

Références

[1] Geoffrey GRIMMET et David STIRZAKER, *Probability and Random Processes*, (seconde édition), 1992

[2] Olivier GARET, *Chaînes de Galton-Watson*, septembre 2010

[3] Textes d'agrégation externe de mathématiques rendus public par le jury, *Épreuve de modélisation*, session 2008