TD de probabilité

Exercice 1 (Loi uniforme)**.** *1.*

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. On commence par remarquer que $[m-\sigma, m+\sigma] \subset [a,b]$. Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(X \in [m-\sigma, m+\sigma]) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{dx}{b-a} = \frac{2\sigma}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 2 (Loi mixte)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}(X=0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \frac{b-a}{3}$ pour tout $0 < a \leq b < 1$.*

1.

$$1 = \mathbb{P}(X \in [0,1]) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X \in]0,1[) + \mathbb{P}(X=1) = 1/4 + p + 1/3.$$

Donc $p = 5/12$.

2. On pose $\mathbb{P}_1$ la loi de Benoulli $b(5/8)$ et $\mathbb{P}_2$ la loi unifomre $\mathcal{U}_{[0,1]}$. On a alors $\mathbb{P} = 2/3\mathbb{P}_1 + 1/3\mathbb{P}_2$.

3.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{t}{3}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 3. *1. F est continue (donc càdlàg), croissante et admet pour limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. C'est donc une fonction de répartition.*

2. F est continue et dérivable (par morceaux) donc c'est la fonction de répartition d'une loi à densité et la densité associée est $f(t) = F'(t) = e^{-t}/(1+e^{-t})^2$.

3. On pose $Y = e^X$, $U = \mathbb{1}_{0<X<1}$ et $Z = XU$. Y est une v.a à valeurs strictement positives et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \log(t)) = 1/(1+e^{-\log(t)}) = t/(1+t).$$

La loi de Y est caractérisé par sa fonction de répartion, calculée ci-dessus (ce n'est pas une loi usuelle). U est une v.a qui prend pour seules valeur 0 et 1. C'est donc une va de Bernoulli. Ona

$$P(U=1) = \mathbb{P}(X \in [0,1]) = F(1) - F(0) = \frac{1-e^{-1}}{2(1+e^{-1}} = p.$$

Donc $\mathbb{U} \sim b(p)$. Z a pour support $[0,1]$. En effet, si $X \notin [0,1]$ alors $Z = 0$ et si $X \in [0,1]$, alors $Z = X \in [0,1]$.

$$\mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0 \quad ou \quad X > 1) = F(0) + 1 - F(1) = 1 - p$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(Z=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq t) = 1 - p + F(t) - F(0) = ...$$

Exercice 4 (Couple)**.** *Soit* (X, Y) *le couple aléatoire sur* $\mathbb{R}^2$ *de densité*

$$f(x, y) = cy\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. *f est une densité donc*

$$1 = \int_{R^2} f(x, y)dxdy = c\int_0^2\int_0^1 dxdy = 2c.$$

Ainsi, $c = 1/2$.

2. $$f_X(t) = \int_R f(t, y)dy = \int_0^1 c\mathbb{1}_{[0,2]}(t)dy = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(t)$$
$$f_Y(t) = \int_0^2 c\mathbb{1}_{[0,1]}(t)dx = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

3. $x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + y)^2 + 4y^2$ *Donc*

$$\begin{aligned}
1 = &\int_{\mathbb{R}^2} c\exp\left(-\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{6}\right) dxdy \\
=&c\int_{y\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2y^2}{3}\right)\int_{x\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x + y)^2}{6}\right) dxdy \\
=&c\int_{y\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2y^2}{3}\right)\int_{x\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\times 3}\right) dxdy \\
=&c\sqrt{2\pi\times 3}\int_{y\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\times 3/4}\right) dy \\
=&c\sqrt{2\pi\times 3}\sqrt{2\pi\times 3/4} = 3\pi\times c
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Loi du maximum)**.** *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur* $[0, b]$*, avec* $b > 0$ *inconnu, que l'on cherche à estimer. On note* $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$*.*

1. $Supp(M_n) = [0, b]$
2. $$\mathbb{P}(M_n \le x) = \mathbb{P}(\forall 1 \le i \le n, X_i \le x) = \prod_i \mathbb{P}(X_i \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x)^n = \left(\frac{x}{b}\right)^n$$
3. $$\mathbb{P}\left(|M_n - b| \ge \varepsilon\right) = \mathbb{P}(M_n \ge b - \varepsilon) = 1 - \left(\frac{b - \varepsilon}{b}\right)^n \to 0$$
4. *(même calcul)*
5. *(simple récriture de la ligne précédente)*
6. $\mathbb{P}(b \in [5, 5.16]) \ge 0.95$*. Avec une confiance de* 95%*, le paramètre* b *appartient à l'intervalle* $[5, 5.16]$.
