TD 3. Optimisation sous contraintes mixtes

Exercice 1. On s'intéresse aux extrema de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} xy \geq 2 \\ y \leq -2x+5 \end{cases}$$

1. Tracer le domaine admissible.
2. Étudier la qualifications des contraintes.
3. Trouver tous les extrema de f et donner leur nature.

Exercice 2. Résoudre le problème d'optimisation $\min_{(x,y)\in K} x(1+y^2)$ sous la contrainte

$$K : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 - \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

Exercice 3. On s'intéresse au extrema globaux de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$ sur le domaine admissible

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \forall 1 \leq i \leq n, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

1. Étudier la qualification des contraintes.
2. Résoudre le système de KKT associé.
3. Conclure.

Exercice 4. On s'intéresse au problème de minimisation $\min_{(x,y)\in K} y - x^3$, où le domaine admissible K est défini par

$$K = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \right\}.$$

1. Tracer le domaine admissible.
2. Montrer l'existence de solution à ce problème.
3. Étudier la qualification des contraintes.
4. Résoudre le problème de KKT associé et conclure.

Exercice 5. Étude d'un système mécanique On considère le système mécanique constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2, strictement positives, reliées entre elles et attachées à deux extrémités fixes. Le système est contenu dans un plan vertical. La masse m_1 est rattaché à l'origine $(0,0)$ par un fil souple de longueur $\ell_0 > 0$ et la masse m_2 est attachée au point $(0,1)$ par un fil souple de longueur $\ell_2 > 0$. Les deux masses sont reliées entre elles par un fil souple de longueur $\ell_1 > 0$ (Cf FIGURE 1). On suppose que tous les fils sont inélastiques et de masse nulle. ON cherche à déterminer les position des masses à l'équilibre en minimisant l'énergie

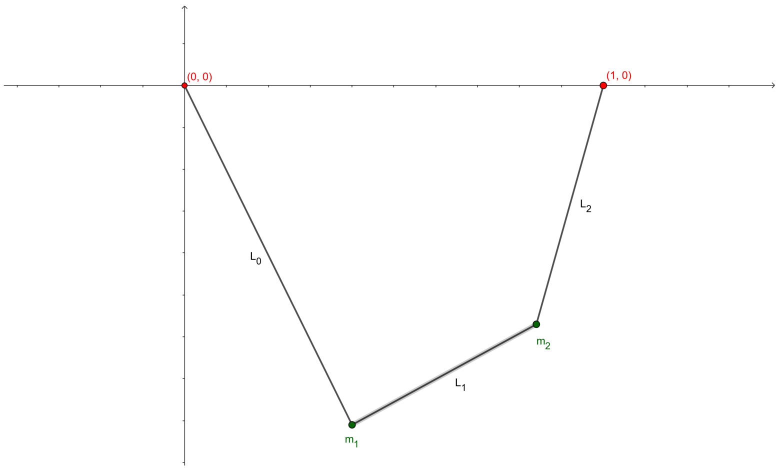

FIGURE 1 – Exemple de position d'équilibre du système

(potentielle) du système. On note (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les positions respectives des masses m_1 et m_2 et

$$X = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4, \quad x_0 = 0 = y_0, \quad x_3 = 1, y_3 = 0.$$

On doit donc minimiser l'énergie

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{2}(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

sous les trois contraintes sur X données par

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \leq \ell_i^2, \quad 0 \leq i \leq 2.$$

1. On suppose que $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 > 1$. Montrer que le domaine admissible associé est non-vide. En déduire que le problème de minimisation sous contrainte admet au moins une solution.
2. On admet que le contraintes sont qualifiées sur tous le domaine admissible. Écrire le système de Karush-Kuhn-Tucker traduisant les conditions nécessaires d'optimalité.
3. On s'intéresse aux cas spécifiques où au moins l'une des cordes n'est pas tendue à l'équilibre.
   a En se basant sur le système de KKT, montrer qu'au moins deux des trois contraintes sont alors saturées.
   b En justifiant par le calcul, trouver tous les cas où une des contraintes n'est pas saturées à l'équilibre. On précisera dans chaque cas les valeurs x_1, y_1, x_2, y_2 correspondantes. Dessiner ces situations.