TD 2. Correction

Exercice 1. 1.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les contraintes sont qualifiées. Soit (x,y,z,λ), on a :

$$\nabla \mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+\lambda = 0 \\ x+z+\lambda = 0 \\ x+y+\lambda = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 1/3 \\ \lambda = -2/3 \end{cases}$$

Le lagrangien admet un unique point critique.
Par ailleurs, on a $(1,0,0) \in K$ et $f(1,0,0) = 0$. De plus, pour tout $(x,y,z) \in K$, on a

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 0 \\ (x+y+z)^2 &= 1 \\ x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz &= 1 \\ f(x,y,z) &= \frac{1-\|(x,y,z)\|^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\{(x,y,z) \in K, f(x,y,z) \geq f(1,0,0)\} \subset B(0,1)$. La fonction f est continue sur le fermé non-vide K et admet un sur-niveau borné. Donc f admet un maximum global sur K qui est nécessairement l'unique point critique du lagrangien.

2.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Le point $(0,0)$ n'appartenant pas à K, on remarque que les contraintes sont qualifiées. Soit (x,y,λ), on a :

$$\nabla \mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = 0 \\ \lambda y = 1/2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

En distinguant les cas selon $x = 0$ ou $x \neq 0$, on obtient alors quatre points critiques : $(0, \pm 1, 1/2)$ et $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2, -1)$, vérifiant

$$f(0,1) = -1, \quad f(0,-1) = 1, \quad f(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = 5/4.$$

La fonction f est continue sur le compact K. Donc f admet un maximum global et un minimum global sur K, nécessairement points critiques du lagrangien. Ainsi f admet deux maxima globaux en $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ et un minimum global en $(0,1)$.

Par ailleurs, sur un voisinage U de $(0,-1)$, on peut paramétrer K par

$$U \cap K = \left\{ (t, -\sqrt{1-t^2}), t \in I \right\},$$

ou I est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. On pose $\varphi(t) = f(t, -\sqrt{1-t^2})$. On a

$$\varphi(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

donc φ admet un minimum local en 0. Ainsi, f admet un minimum local en $(0, -1)$.

Exercice 2 (D'un ps à l'autre)**.** 1.

$$\nabla f(x) = 2Ax, \quad \nabla g(x) = 2x.$$

La contrainte est qualifiée car $0 \notin K$. Pour tout $x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Ax + 2\lambda x = 0 \\ \qquad \|x\|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A + \lambda id)x = 0 \\ \qquad \|x\|^2 = 1 \end{cases}.$$

La matrice A est symétrique, elle est donc ortho-diagonalisable. En notant, $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_p$ les valeurs propres de A (avec multiplicité) et E_i les espaces propres associés, l'ensemble des points critiques du lagrangien est

$$\left\{(x, \lambda) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, \exists 1 \leq i \leq p, x \in E_i, \lambda = -\lambda_i\right\}.$$

La fonction f est continue sur le compact K donc elle admet un maximum et un minimum global sur K. Pour $x \in E_i \cap \mathbb{S}^{n-1}$, on a $f(x) = \lambda_i$. Donc x atteint son minimum global en tout point de $E_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ et son maximum global en tout point de $E_p \cap \mathbb{S}^{n-1}$.
Par ailleurs, les autres points critiques du lagrangien sont des points-selles pour f. En effet, soit $x \in E_i \cap \mathbb{S}^{n-1}$ avec $2 \leq i \leq p-1$ et notons e_1 et e_n deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_p respectivement. Dans ce cas les fonctions

$$\varphi(t) = f(\sin(t)e_1 + \cos(t)x), \quad \psi(t) = f(\cos(t)x + \sin(t)e_n)$$

vérifient

$$\varphi(t) = \lambda_i + (\lambda_1 - \lambda_i)t^2 + o(t^2), \quad \psi(t) = \lambda_i + (\lambda_n - \lambda_i)t^2 + o(t^2).$$

Donc φ est maximal en 0 et ψ est minimal en 0. Ainsi, x est un point-selle.

2. La contrainte est qualifiée pour la même raison et on obtient l'ensemble de point critique du lagrangien suivant :

$$\left\{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \exists 1 \leq i \leq p, x \in E_i, \|x\|^2 = \frac{1}{\lambda_i}, \mu = -\|x\|\right\}.$$

Par le même argument, f admet un minimum et un maximum global sur K. Ils sont atteint sur $E_p \cap \mathbb{S}(0, \sqrt{\lambda_p}^{-1})$ et $E_1 \cap \mathbb{S}(0, \sqrt{\lambda_1}^{-1}$ respectivement. Les autres points critiques du lagrangiens sont des points-selles.

Exercice 3 (Distance d'un point à une courbe)**.** La distance du point (x, y) à l'origine est donnée par $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour simplifier les calculs, on optimise sur la distance au carré. La fonction objectif est donc

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2.$$

La contrainte est elle donnée par la courbe :

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^6 + y^6 - 1.$$

Le domaine admissible $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$ est un compact non-vide. Donc la fonction continue f admet un maximum et un minimum global sur K. On a

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x^5 \\ y^5 \end{pmatrix}.$$

L'origine n'étant pas un point du domaine admissible, la contrainte g est qualifiée en tout point de K. Ainsi, d'après le théorème des extrema liés, si $(x, y) \in K$ est un extremun de f sur K alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0$. Le système associé admet 8 solutions : $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1/\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[6]{2})$ et $(\pm 1/\sqrt[6]{2}, \mp 1/\sqrt[6]{2})$. Les maxima et minima globaux de f sur K sont nécessairement parmis ces points. Par ailleurs, si (x, y) est l'un des quatre premiers, on a $f(x, y) = 1$ et si c'est l'un des quatre dernier, on a $f(x, y) = \sqrt[3]{2}$. Ainsi, les quatre premiers points sont les minimiseurs de f et les quatre autres sont les maximiseurs de f.

Exercice 4 (Inégalité de Minkowski).

1. On suppose que $y = \lambda x$, on a alors $\|x + y\|_p = |1 + \lambda| \|x\|_p$ et $\|x\|_p + \|y\|_p = (1 + |\lambda|)\|x\|_p$, donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. De même si $x = 0$.
2. On pose $f : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \|x + y\|_p^p$, $g_1 : (x, y) \mapsto \|x\|_p^p - \alpha^p$ et $g_2 : (x, y) \mapsto \|y\|_p^p - \beta^p$. L'ensemble admissible $K_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0\}$ est ainsi fermé et borné donc compact. Ainsi, f admet un maximum sur $K_{\alpha,\beta}$.
   De plus, si $p > 1$ alors, f, g_1 et g_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de K et on a
   $$\nabla f(x, y) = p \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)|x_1 + y_1|^{p-2} \\ \dots \\ (x_n + y_n)|x_n + y_n|^{p-2} \\ (x_1 + y_1)|x_1 + y_1|^{p-2} \\ \dots \\ (x_n + y_n)|x_n + y_n|^{p-2} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x, y) = p \begin{pmatrix} x_1|x_1|^{p-2} \\ \dots \\ x_n|x_n|^{p-2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y) = p \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ y_1|y_1|^{p-2} \\ \dots \\ y_n|y_n|^{p-2} \end{pmatrix}.$$
   Par ailleurs, si $p = 1$, elles sont g_1 et g_2 sont encore $\mathcal{C}^1$ sur K et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en les points de la forme $(x, -x)$, points que l'on saura traiter à part. Dans la suite, on négligera cela.
   Donc les contrainte sont qualifiées sur K. Soit $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_i + y_i)|x_i + y_i|^{p-2} + \lambda_1 x_i |x_i|^{p-2} = 0 \\ (x_i + y_i)|x_i + y_i|^{p-2} + \lambda_2 y_i |y_i|^{p-2} = 0 \\ \|x\|_p = \alpha, \quad \|y\|_p = \beta \end{cases}$$
   On en déduit que pour tout i, $\lambda_1 x_i = \lambda_2 y_i$, *i.e* x et y sont liés. Ainsi, le maximum de f sur $K_{\alpha,\beta}$ est atteint pour des vecteurs colinéaires.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_p$. Si $\alpha = 0$ (ou $\beta = 0$), alors x et y vérifient l'inégalité. Sinon, il existe $(x^*, y^*) \in K_{\alpha,\beta}$ vérifiant $f(x^*, y^*) = \max_{K_{\alpha,\beta}} f$. En appliquant la question 1) à x^* et y^* colinéaires, on a alors
   $$\|x + y\|_p = f(x, y)^{1/p} \leq f(x^*, y^*)^{1/p} = \|x^* + y^*\|_p \leq \|x^*\| + \|y^*\| = \alpha + \beta = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Exercice 5 (Inégalité d'Hadamard)**.** 1. K est compact non-vide et f est continue donc f admet un maximum sur K.

2. On commence par remarque que si $(v_1 \dots, v_n)$ est une base orthonormée, alors $f(v_1 \dots, v_n) = 1$. Donc si $(v_1 \dots, v_n)$ est un maximum de f sur K alors $f((v_1 \dots, v_n) \geq 1$. On pose $g_i(v_1, \dots, v_n) = \|v_i\|^2 - 1$. On a alors

$$\langle \nabla g_i(v_1 \dots, v_n), (h_1 \dots, h_n) \rangle = \langle v_i, h_i \rangle.$$

Puisque $0 \notin K$, alors la famille $(\nabla g_i(v_1 \dots, v_n))_i$ est libre pour tout $(v_1 \dots, v_n) \in K$ et la contrainte est qualifiée sur K. D'après le thm des extrema liés, si $(v_1 \dots, v_n)$ est un maximum de f sur K, alors on dispose de $(\lambda_i)_i \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla f(v_1 \dots, v_n) + \sum \lambda_i \nabla g_i(v_1 \dots, v_n). \tag{1}$$

Par ailleurs, f est n-linéaire donc pour tout $h_i \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \nabla f(v_1 \dots, v_n), (0, \dots, h_i, \dots, 0) \rangle = f((v_1 \dots, h_i, \dots, v_n).$$

Ainsi, pour tout i et $h_i \in \mathbb{R}^n$, on a $f(v_1, \dots h_i, \dots, v_n) = \lambda_i \langle v_i, h_i \rangle$. En particulier, en évaluant avec $h_i = v_i$ et $h_j = 0$ pour $j \neq i$, $1 \leq f(v) = \lambda_i \|v_i\|^2 = \lambda_i$. D'autre part, en évaluant en $h_i = v_j$ avec $i \neq j$, on a $0 = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i \dots, v_n) = \langle v_i, v_j \rangle$. Donc $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthonormée.

3. le maximum de f sur K vaut donc 1. Pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, on a $\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)_i \in K$ et $f\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)_i \leq 1$. Ce qui conclut.

Exercice 6 (Directions admissibles)**.** Pour plus de clarté, on notera $E = \{\lambda(y-x)/y \in K, \lambda > 0\}$. On procède par double inclusion.

$\subset$ Soit $h \in K(x)$ on dispose d'une suite $(\varepsilon_k)_k > 0$ et d'une suite $(h_k)_k$ de vecteurs telles que $\varepsilon_k \to 0$, $h_k \to h$ et $\forall k, x + \varepsilon_k h_k \in K$. On pose alors $y_k = x + \varepsilon_k h_k \in K$ et $\lambda_k = \varepsilon_k^{-1} > 0$. Pour tout cas on a : $h_k = \lambda_k(y_k - x) \in E$. Par passage à la limite, $h \in \bar{E}$.

$\supset$ Soit $h \in \bar{E}$. On dispose de suites $(y_k) \in K$ et $(\lambda_k)_k > 0$ telles que $h_k := \lambda_k(y_k - x)$ converge vers h. Pour tout k, on a : $y_k = \lambda_k^{-1} h_k + x \in K$ et $x \in K$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k}{k(1+\lambda_k^2)} y_k + (1 - \frac{\lambda_k}{k(1+\lambda_k^2)} x \in K \\ \frac{1}{k(1+\lambda_k^2)} h_k + x \in K \end{aligned}$$

En posant $\varepsilon_k = \frac{1}{k(1+\lambda_k)}$, on a bien $\varepsilon_k \to 0$ et $h \in K(x)$.
