TD 1. Corrections

Exercice 1. Trouver les extrema locaux et globaux des fonctions

1. On commence par remarquer que f est continue. De plus on a $2|xy| \leq \|(x,y)|^2$. Ainsi

$$x^4 + y^4 = \|(x,y)\|^4 - 2x^2y^2 \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^4$$

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\left(\|(x,y)\|^2 - 8\right) - 32.$$

On en déduit que f est coercive sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f admet un minimum global. En revanche, f n'admet pas de maxima globaux pour la même raison. Par ailleurs, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 8(x-y) \\ 4y^3 + 8(x-y) \end{pmatrix}.$$

Il y a trois points critiques $(0,0)$ et $\pm(2,-2)$. On a

$$f(2,-2) = -32 = f(-2,2), \quad f(0,0) = 0$$

Donc $\pm(2,-2)$ sont les mimima globaux de f. Enfin, en regardant $f(t,t)$ et $f(t,-t)$ au voisinage de $t = 0$ on montre que $(0,0)$ est un point-selle.

2.
$$\nabla f(x,y) = xy\begin{pmatrix} y(3x+4y+2) \\ y(2x+6y+2) \end{pmatrix}.$$

On remarque que f n'admet pas d'extremum global.
Points critiques : $(0,a)$, $a \in \mathbb{R}$, $(b,0)$, $b \in \mathbb{R}$ et $(-2/5, -1/5)$. Pour les points de la forme $(0,a)$ et $(b,0)$, la hessienne ne permet pas de conclure car elle est trop dégénérée. En revanche, on a

$$f(h, a+k) = a^2(1+2a)h^2 + h^2a[ah + 2k + 6ak] + h^2\mathcal{O}(\|(h,k)\|^2).$$

Donc $(0, a$ est un minimum local si $1 + 2a > 0$ et un maximum local si $1 + 2a < 0$. De plus, $(0, -1/2)$ est un point-selle car le signe de $[ah + 2k + 6ak]$ n'est pas fixe.
L'étude est la même pour les point de la forme $(b,0)$, avec une séparation en $b = -1$.
Pour finir,

$$\nabla^2 f\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right) = \frac{1}{5^3}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -24 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est strictement positif et sa trace strictement négative donc $(-2/5, -1/5)$ est un maximum local.

Exercice 2. 1. On remarque que f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x - \beta y \\ \beta y - \beta x \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y) = 2\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\beta \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)x - \beta y = 0 \\ \beta y - \beta x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc f admet un unique point critique en $(0,0)$.

3. On remarque que Hess(f) est constante et que

$$\det(\text{Hess}(f) = \alpha\beta \quad \text{Tr}(\text{Hess}(f) = \alpha + 2\beta.$$

 a) Les deux valeurs propres de Hess$(f)(x, y)$ sont strictement positives, uniformement sur $\mathbb{R}^2$. Donc f est fortement convexe et donc admet un minimum global, nécessairement en $(0, 0)$. Ainsi, $(0, 0)$ est un minimum global et unique extremum de f.
 b) Dans ce cas, les valeurs propres sont strictement négative. Donc $-f$ est fortement convexe. Ainsi f admet un maximum global, nécessairement en $(0, 0)$. Donc $(0, 0)$ est un maximum global et unique extremum de f.
 c) $\det(\text{Hess}(f)(0, 0)) < 0$ donc admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Ainsi $(0, 0)$ est un point-selle.

Exercice 3. On pose $g = -\ln f$. On a

$$g(m, \sigma) = \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \sum \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Par croissance de ln, maximiser f est équivalent à minimiser g. On a

$$\nabla g(m, \sigma) = \begin{pmatrix} 2\sum \dfrac{m - x_i}{2\sigma^2} \\ \dfrac{n}{\sigma} - 2\sum \dfrac{(m - x_i)^2}{2\sigma^3} \end{pmatrix}, \text{Hess}(g)(m, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & -4\sum \frac{m - x_i}{2\sigma^3} \\ -4\sum \frac{m - x_i}{2\sigma^3} & -\frac{n}{\sigma^2} + 6\sum \frac{(m - x_i)^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

La fonction g admet un unique point critique $m^* = \frac{1}{n}\sum x_i$, $\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum(m^* - x_i)^2\right)^{1/2}$. De plus, on a

$$\text{Hess}(g)(m^*, \sigma^*) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^{*2}} \end{pmatrix},$$

matrice définie positive. Donc g est minimale en (m^*, σ^*) et f y est maximal.

Exercice 4. 1. On a :

$$\sum_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j - y_i \right|^2 = \|Ma - y\|^2.$$

où $M_{ij} = x_i^j$, $1 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq n$.

2. Remarquons pour commencer que la matrice $M \in \mathcal{M}_{N,n+1}$ est une matrice de Vandermonde dont au moins $n+1$ lignes sont distinctes deux à deux. Elles est donc de rang plein. En particulier, $\ker(M) = \{0\}$ et ${}^tMM$ est inversible[1]. On pose $f : a \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \|Ma - y\|^2$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale et on a $\nabla f(x) = 2{}^tM(Mx - y)$. L'unique point critique de f est $x^* = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$. De plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^{n+1}$, en développant, on a

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \|Mh\|^2.$$

Donc x^* est l'unique minimum de f et c'est un minimum global.

Remarque. Ce résultat a une explication géométrique. Soit $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que Mb soit la projection orthogonal de y sur $V = \{Ma, a \in \mathbb{R}^{n+1}\}$. Dans ce cas, Mb est caractérisé par : $\langle y - Mb, Ma\rangle = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}^{n+1}$. On montre alors que b est unique et caractérisé par : $b = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$. Par ailleurs, le théorème de Pythagore montre alors que pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a : $\|Ma - y\|^2 = \|Mn - y\|^2 + \|M(b - a)\|^2$. Et comme $\ker(M) = \{0\}$, b est l'unique minimum global.

1. ${}^tMMx = 0$ implique $|Mx| = 0$ donc $x \in \ker(M)$.

Exercice 5. La fonction f est continue sur le compacte $\overline{B(0,1)}$. Elle y est donc bornée et y atteint ses bornes. Si $\sup f = \inf f$, alors f est constante sur la boule fermée et donc son gradient est nul. Si $\inf f < \sup f$, alors il existe $x \neq y$ dans $\overline{B(0,1)}$ tels que $f(x) = \inf f$ et $f(y) = \sup f$. f étant constante sur $\mathbb{S}^1$, on peut supposer que $x \in B(0,1)$. Or f est différentiable sur l'ouvert $B(0,1)$ donc $\nabla f(x) = 0$.
