TD 1. Optimisation sans contraintes

Exercice 1. Décrivez les points critiques des fonctions suivantes.

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2(1 + x + 2y)$

Exercice 2. Soient α, β deux réels non nuls. On définit la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\alpha + \beta)x^2 + \beta y^2 - 2\beta xy.$$

1. Calculez le gradient et la hessienne de f en tout point.
2. Montrez que f admet un unique point critique que l'on déterminera.
3. Dans les cas suivants, que peut-on dire du point critique, localement et globalement ?
   (a) si $\alpha, \beta > 0$?
   (b) si $\alpha, \beta < 0$?
   (c) si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$?

Exercice 3 (Maximum de vraisemblance)**.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[,\ \varphi(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On fixe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose que les x_i ne sont pas tous égaux. Montrez que la fonction

$$f : (m, \sigma) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, m, \sigma)$$

admet un unique maximum local (m^*, σ^*) que l'on précisera. *Indication : on pourra passer au logarithme.*

Exercice 4 (Régression polynomiale)**.** On considère le nuage de point $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq N$. On cherche un polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui approche au mieux le nuage au sens des moindre carré *i.e* on cherche à résoudre

$$\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \sum_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2.$$

On supposera que $N > n + 1$ et qu'au moins $n + 1$ des x_i sont deux à deux distincts.

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur de ses coefficients. Montrez que le problème est équivalent au problème de minimisation

   $$\min_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} \|Ma - y\|^2$$

   où l'on précisera la matrice M.
2. Montrez qu'il existe une unique solution à ce problème. (indication : M est de rang plein. Pourquoi ?)

Exercice 5 (Théorème de Rolle généralisé)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est constante sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$. Montrez qu'il existe x^* dans la boule ouverte $B(0, 1)$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$.