

5. Théorèmes de convergence

Exercice 1. À l'aide des théorèmes de convergence, déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + nk + 1}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1} \right)^n, \quad (iii) \int_0^1 \frac{1 + nx^3}{(1 + x^2)^n} dx,$$

$$(iv) \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x} dx, \quad (v) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^n} dx, \quad (vi) n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}} dt.$$

Exercice 2 (Interversion série intégrale).

(i) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + nb)^2}.$$

(ii) Montrer que la somme de la série $\sum ne^{-nx}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer son intégrale.

(iii) Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $x \mapsto e^{x^2}$ soit μ -intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

Exercice 3. Soient $\alpha > 0$ et μ la mesure de densité $f_\alpha : x \mapsto \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que μ est une mesure de probabilité et que la mesure image ν de μ par $x \mapsto [x] + 1$ est une mesure géométrique de paramètre p à déterminer, i.e. :

$$\nu = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \delta_k.$$

Exercice 4. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, admettant une limite $f(1^-)$ à gauche en 1. L'objectif est de montrer l'équivalent suivant :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(1^-)}{n}.$$

- (i) Montrer que la suite (I_n) est bien de limite nulle.
- (ii) Montrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. En déduire que l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n .
- (iii) Montrer l'équivalent souhaité.

Exercice 5 (Partie finie de Hadamard). Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit intégrable sur $]0, 1[$. Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \ln \varepsilon.$$

Exercice 6 (Fonction Gamma d'Euler). Pour tout $t > 0$, on pose :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Montrer que Γ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et montrer la formule d'Euler :

$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^t}{t(t+1) \dots (t+n)}.$$

Exercice 7. Considérons les fonctions $f : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xt} \frac{\sin x}{x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ et $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx$. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et l'exprimer à l'aide de fonction élémentaires. Peut-on en déduire que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$?

Exercice 8. En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :

$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx.$$

Exercice 9 (Transformée de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable (i.e. $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R}). On définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

- (i) Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ définit une application linéaire continue.
- (ii) Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$. Montrer que $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi)$.
- (iii) Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$.

En déduire que $\mathcal{F}f$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

- (iv) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $h = f * g$. Montrer que $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.