

## 5. Théorèmes de convergence

---

**Exercice 1.** À l'aide des théorèmes de convergence, déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + nk + 1}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2} \left( \frac{k}{k+1} \right)^n, \quad (iii) \int_0^1 \frac{1 + nx^3}{(1+x^2)^n} dx,$$

$$(iv) \int_0^n \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x} dx, \quad (v) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx, \quad (vi) n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}} dt.$$

**Exercice 2** (Interversion série intégrale).

- (i) Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$ . Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

(ii) Montrer que la somme de la série  $\sum ne^{-nx}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et calculer son intégrale.

(iii) Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $x \mapsto e^{x^2}$  soit  $\mu$ -intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

**Exercice 3.** Soient  $\alpha > 0$  et  $\mu$  la mesure de densité  $f_\alpha : x \mapsto \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que  $\mu$  est une mesure de probabilité et que la mesure image  $\nu$  de  $\mu$  par  $x \mapsto \lfloor x \rfloor + 1$  est une mesure géométrique de paramètre  $p$  à déterminer, i.e. :

$$\nu = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \delta_k.$$

**Exercice 4.** Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lebesgue-intégrable, admettant une limite  $f(1^-)$  à gauche en 1. L'objectif est de montrer l'équivalent suivant :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(1^-)}{n}.$$

- (i) Montrer que la suite  $(I_n)$  est bien de limite nulle.  
(ii) Montrer le résultat pour  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . En déduire que l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à  $nI_n$ .  
(iii) Montrer l'équivalent souhaité.

**Exercice 5** (Partie finie de Hadamard). Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  soit intégrable sur  $]0, 1[$ . Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \ln \varepsilon.$$

**Exercice 6** (Fonction Gamma d'Euler). Pour tout  $t > 0$ , on pose :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Montrer que  $\Gamma$  définit une fonction  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  et montrer la formule d'Euler :

$$\forall t > 0, \Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

**Exercice 7.** Considérons les fonctions  $f : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xt} \frac{\sin x}{x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$  et  $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx$ . Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'exprimer à l'aide de fonction élémentaires.

Peut-on en déduire que la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  ?

**Exercice 8.** En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :

$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx.$$

**Exercice 9** (Transformée de Fourier). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable (i.e.  $|f|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ). On définit la transformée de Fourier de  $f$  par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

- (i) Montrer que  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  définit une application linéaire continue.
- (ii) Pour  $a \in \mathbb{R}$ , notons  $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$ . Montrer que  $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi)$ .
- (iii) Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :  $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow[|\xi| \rightarrow +\infty]{} 0$ .

En déduire que  $\mathcal{F}f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

- (iv) Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  et  $h = f * g$ . Montrer que  $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ .