ENS de Rennes - Université de Rennes
Magistère de mathématiques - L3
Intégration

Deuxième contrôle continu - 21 octobre 2024

Le sujet comporte **deux** pages. L'épreuve dure une heure trente. Les documents et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.

Cours (barême approximatif : 6 points)

Sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$,

1. énoncer et démontrer l'inégalité de Markov,

2. énoncer le théorème de convergence monotone,

3. énoncer le lemme de Fatou,

4. énoncer et démontrer le théorème de convergence dominée.

Exercice 1 (barême approximatif : 6 points)

Soit E un espace muni d'une mesure μ σ-finie, et soit une suite croissante (E_n) de parties de E d'union E et telles que $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout n.

À toute fonction mesurable f sur E on associe la fonction $T_n(f) = 1_{E_n}\, \varphi_n \circ f$ où

$$\varphi_n(t) = -n \quad \text{si} \quad t < -n, \quad \varphi_n(t) = t \quad \text{si} \quad -n \leq t \leq n, \quad \varphi_n(t) = n \quad \text{si} \quad t > n.$$

1. Soit f une fonction mesurable sur E et n un entier. Démontrer que $T_n(f)$ est intégrable et bornée.

2. Soit f une fonction positive sur E et n un entier. Démontrer que $T_{n+1}(f) \geq T_n(f) \geq 0$.

3. Soit f et g deux fonctions mesurables sur E et n un entier. Démontrer que $T_n(f) - T_n(g)$ est intégrable et que de plus

$$\int_E |T_n(f) - T_n(g)|\, d\mu \leq \int_E |f - g|\, d\mu.$$

4. Soit f une fonction mesurable sur E, de parties positive et négative f^+ et f^-. Démontrer que

$$T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-), \qquad |T_n(f)| = T_n(f^+) + T_n(f^-).$$

5. Soit f une fonction mesurable sur E. Démontrer que f est intégrable si et seulement si la suite réelle $\left(\int_E |T_n(f)|\, d\mu \right)_n$ est bornée.

Exercice 2 : Théorème de récurrence de Poincaré (barême approximatif : 8 points)

Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et $T : E \to E$ une application mesurable telle que

$$\int_E u(T(x))\, d\mu(x) = \int_E u(x)\, d\mu(x)$$

pour toute fonction mesurable positive $u : E \to \mathbb{R}$.

1. Déterminer la mesure image de la mesure μ par l'application T.

Pour x dans E on définit les itérés de x par T par

$$T^0(x) = x$$

puis par récurrence

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$$

pour n entier naturel.

Soit A dans $\mathcal{A}$ et 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A, et soit $f, g, h : E \to [0, +\infty]$ les fonctions définies par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_A(T^n(x)), \qquad g(x) = e^{-f(x)}, \qquad h(x) = g(T(x))$$

avec la convention $g(x) = 0$ si $f(x) = +\infty$.

2. Démontrer que $g(x) = e^{-1_A(x)}\, h(x)$ pour tout x dans E puis que la fonction $h - g$ est positive sur E.

3. Démontrer en détail que les fonctions f, g et h sont mesurables.

4. Démontrer que les fonctions g et h sont intégrables sur E et que

$$\int_E h(x)\, d\mu(x) = \int_E g(x)\, d\mu(x).$$

5. Démontrer que $h = g$ presque partout.

6. Démontrer que pour presque tout x dans A il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $T^n(x)$ appartienne à A.

Correction Exercice 1

On remarque que la valeur de $T_n(f)(x)$ ne dépend que de n, x et $f(x)$, donc pas des autres valeurs prises par f. De plus, si f et x sont tels que $f(x) = 0$, alors pour tout n on a $\varphi_n(f(x)) = 0$ et donc $T_n(f)(x) = 0$.

1. Les fonctions 1_{E_n} et $\varphi_n \circ f$ sont mesurables et bornées par 1 et n respectivement, donc leur produit $T_n(f)$ est mesurable et bornée par n. De plus $T_n(f)$ est nul hors de la partie E_n de mesure finie, donc est intégrable.

2. Soit x et n fixés.

Si $x \in E_n$ alors $x \in E_{n+1}$ donc $1_{E_n}(x) = 1_{E_{n+1}}(x) = 1$; de plus $\varphi_{n+1}(f(x)) \geq \varphi_n(f(x)) \geq 0$, donc $T_{n+1}(f)(x) \geq T_n(f)(x) \geq 0$.

Si $x \in E_{n+1} \setminus E_n$ alors $1_{E_n}(x) = 0$ donc $T_n(f)(x) = 0$; de plus $1_{E_{n+1}}(x) = 1$ et $\varphi_{n+1}(f(x)) \geq 0$, donc $T_{n+1}(f)(x) \geq 0 = T_n(f)(x)$.

Si $x \notin E_{n+1}$ alors $1_{E_n}(x) = 1_{E_{n+1}}(x) = 0$ et donc $T_{n+1}(f)(x) = T_n(f)(x) = 0$.

Dans tous les cas $T_{n+1}(f)(x) \geq T_n(f)(x) \geq 0$.

3. Les fonctions $T_n(f)$ et $T_n(g)$ et donc $T_n(f) - T_n(g)$ sont intégrables d'après la question 1. De plus la fonction φ_n est 1-lipschitzienne donc

$$\int_E |T_n(f) - T_n(g)|\, d\mu = \int_{E_n} |\varphi_n(f(x)) - \varphi_n(g(x))|\, d\mu(x) \leq \int_{E_n} |f(x) - g(x)|\, d\mu(x) \leq \int_E |f(x) - g(x)|\, d\mu(x)$$

4. Soit x fixé. Alors en cet x :

* ou bien $f geq0$: alors $f^- = 0$ donc $T_n(f^-) = 0$; de plus $f^+ = f$ donc $\varphi_n(f^+) = \varphi_n(f)$ puis $T_n(f^+) = T_n(f)$.

* ou bien $f < 0$: alors $f^+ = 0$ donc $T_n(f^+) = 0$; de plus $f^- = -f$ donc $\varphi_n(f^-) = -\varphi_n(f)$ puis $T_n(f^-) = -T_n(f)$.

Dans tous les cas $T_n(f^+) - T_n(f^-) = T_n(f)$ et $T_n(f^+) + T_n(f^-) = |T_n(f)|$.

5. D'après la question 1 les $T_n(f)$ sont intégrables donc la suite $\left(\int_E |T_n(f)|\, d\mu \right)_n$ est bien une suite réelle.

Supposons que f soit intégrable. Alors, d'après la question 3 appliquée à $g = 0$, pour laquelle $T_n(g) = 0$, on a $\int_E |T_n(f)|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu < +\infty$, donc la suite est bien bornée.

Supposons inversement que la suite $\left(\int_E |T_n(f)|\, d\mu \right)_n$ soit bornée.

1e possibilité : (i) Dans un premier temps on suppose que $f \geq 0$. Alors $T_{n+1}(f) \geq T_n(f) \geq 0$ d'après la question 2. Soit alors x fixé. Alors la suite $(T_n(f)(x))_n$ est une suite croissante positive. De plus elle converge vers $f(x)$: en effet, ou bien $f(x) = +\infty$ et alors $T_n(f)(x) = n$ converge vers $f(x)$; ou bien $f(x) < +\infty$, et alors pour $n > f(x)$ on a $\varphi_n(f(x)) = f(x)$ et pour n assez grand on a $x \in E_n$, de sorte que pour n assez grand on a $T_n(f)(x) = f(x)$.

Donc par convergence monotone la suite $\left(\int_E |T_n(f)|\, d\mu = \int T_n f \right)$ converge vers $\int f$. Comme cette suite est bornée ceci assure que la fonction positive f est intégrable.

(ii) Dans le cas général, on applique (i) à $T_n(f^+)$ et $T_n(f^-)$. La relation

$$|T_n(f)| = T_n(f^+) + T_n(f^-)$$

démontrée en question 4 assure

$$\int |T_n(f)| = \int T_n(f^+) + T_n(f^-).$$

Comme les $\int_E |T_n(f)|\,d\mu$ sont bornées on en déduit que les $\int_E |T_n(f^+)|\,d\mu$ et $\int_E |T_n(f^-)|\,d\mu$ sont bornées, donc d'après (i) que les fonctions positives f^+ et f^- sont intégrables. Ainsi f est intégrable.

2e possibilité : la suite $(|T_n f|)_n$ converge simplement vers $|f|$ puisque pour tout x fixé

$$|T_n(f)(x)| = 1_{E_n}(x)|\varphi_n \circ f(x)|$$

est égal à $|\varphi_n \circ f(x)|$ pour tout n assez grand puisque la suite (E_n) est croissante d'union E ; de plus $|\varphi_n \circ f(x)|$ est à son tour égal à $|f(x)|$ si $|f(x)| < +\infty$ et $n \geq |f(x)|$, et est égal à n donc converge vers $|f(x)|$ si $|f(x)| = +\infty$.

Par conséquent, par le lemme de Fatou

$$\int |f|\,d\mu \leq \liminf \int |T_n f|\,d\mu$$

qui est $< +\infty$ si la suite $\left(\int_E |T_n(f)|\,d\mu\right)_n$ soit bornée.

Correction Exercice 2.

1. Par hypothèse sur μ et T on a

$$\int_E u(T(x))\,d\mu(x) = \int_E u(x)\,d\mu(x)$$

pour toute fonction mesurable positive $u : E \to \mathbb{R}$.

En particulier, si B est un ensemble mesurable quelconque de E, prenant $u = 1_B$ on a

$$\int_E 1_B(T(x))\,d\mu(x) = \int_E 1_B(x)\,d\mu(x)$$

c'est-à-dire

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B).$$

Autrement dit la mesure image de μ par T est la mesure μ.

2. On écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_A(T^n(x)) = 1_A(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 1_A(T^n(x)) = 1_A(x) + f(T(x)).$$

Composant avec l'exponentielle on obtient alors

$$g(x) = e^{-1_A(x)}\,g(T(x)) = e^{-1_A(x)}\,h(x).$$

On remarque alors que $0 \leq g \leq 1$ par définition, et en particulier g prend des valeurs réelles. Il en est de même pour h. De plus $e^{-1_A(x)} \leq 1$ et de nouveau $h(x) \geq 0$ pour tout x dans E, donc $g(x) \leq h(x)$.

Autrement dit la fonction réelle $h - g$ est positive.

3. Pour N entier soit

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} 1_A(T^n(x)).$$

La fonction T est mesurable donc par composition les T^n le sont, et A est mesurable donc 1_A est mesurable ; donc par composition la fonction f_N est mesurable. Par suite la fonction f est mesurable comme limite simple de la suite de fonctions mesurables (f_N). De plus la fonction g est mesurable comme composition de l'exponentielle avec la limite simple de la suite de fonctions mesurables (f_N). Enfin la fonction $h = g \circ T$ est mesurable comme composée des fonctions mesurables T et g.

4. La fonction g est mesurable d'après la question 2, et de plus $0 \leq g \leq 1$ comme on l'a déjà remarqué (par exemple puisque les f_N sont toutes positives). Ainsi g est intégrable puisque μ est finie.

De même la fonction h est mesurable et $0 \leq h \leq 1$ puisqu'il en est de même de g. Par conséquent, de nouveau, h est intégrable puisque μ est finie. De plus, par hypothèse sur T (appliquée à la fonction $u = g$ mesurable positive)

$$\int_E h(x)\, d\mu(x) = \int_E g(T(x))\, d\mu(x) = \int_E g(x)\, d\mu(x).$$

5. D'après la question 2 la fonction $h - g$ est positive. D'après les questions 3 et 4 elle est mesurable et intégrable comme différence des fonctions intégrables g et h, et de nouveau d'après la question 4

$$\int (h-g) = \int h - \int g = 0.$$

Par conséquent $h - g$ est nulle presque partout, c'est-à-dire que $\mu(\{h \neq g\}) = 0$.

6. Pour x dans A, il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $T^n(x)$ appartienne à A si et seulement si $f(x) = +\infty$. On doit donc montrer que pour presque tout x dans A on a $f(x) = +\infty$.

Or, d'après les questions 2 et 5,

$$h - g = (e^{1_A} - 1)g$$

est nulle p. p. Or, sur A, $e^{1_A} = e$ donc $e^{1_A} - 1 \neq 0$. Par conséquent $g = 0$ p. p. sur A, soit $f = +\infty$ p. p. sur A.