TD 2. Optimisation sous contraintes de type égalité

Exercice 1 (Directions admissibles). *Soit K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des directions admissibles en $x \in K$ est donné par :*

$$K(x) = \overline{\{\lambda(y-x), \lambda \in \mathbb{R}_+^*, y \in K\}}.$$

Exercice 2. *Trouver les extrema locaux et globaux pour les problèmes suivants*

1. $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ *sur* $K = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\}$.
2. $f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 - x_2$ *sur* $K = \{x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$.

Exercice 3 (D'un ps à l'autre). *On considère une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Étudier les extrema des problèmes suivants :*

1. $f : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ *sous la contrainte* $\|x\|^2 = 1$.
2. $f : x \mapsto \|x\|^2$ *sous la contrainte* $\langle Ax, x\rangle = 1$.

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe). *Déterminer, s'ils existent, les points de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$, les plus proches et les plus éloignés de l'origine.*

Exercice 5 (Inégalité de Minkowski). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$. On souhaite redémontrer l'inégalité de Minkowski :*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

1. *Montrer (1) dans le cas où x et y sont colinéaires.*
2. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \|x+y\|_p^p$ admet un maximum sur l'ensemble $\{(x,y) \in R^n \times \mathbb{R}^n, \|x\|_p = \alpha, \|y\|_p = \beta\}$, atteint pour des vecteurs x, y colinéaires.*
3. *Conclure.*

Exercice 6 (Inégalité de Hadamard). *On note $E = (\mathbb{R}^n)^n$ et f la fonction qui à $(v_1, \ldots, v_n) \in E$ associe le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les v_i.*

1. *Montrer que f admet un maximum strictement positif sur l'ensemble*

$$K = \{v \in E / \forall\, i, |v_i| = 1\}.$$

2. *Montrer que si f atteint un maximum sur K en v alors $(v_i)_i$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*
3. *En déduire l'inégalité de Hadamard : pour tout $v \in E$, $|\det(v)| \leq \prod_i |v_i|$.*
