TD 1. Corrections

Exercice 1. *Trouver les extrema locaux et globaux des fonctions*

1. *Cf Exercice 2.*
2. $$\nabla f(x,y) = xy \begin{pmatrix} y(3x+4y+2) \\ y(2x+6y+2) \end{pmatrix}.$$

   Points critiques : $(0,a)$, $a \in \mathbb{R}$, $(b,0)$, $b \in \mathbb{R}$ *et* $(-2/5,-1/5)$. $f(h,a) = a^2(1+2a)h^2 + o(h^2)$. *Donc* $(0,a$ *est un minimum local si* $1+2a>0$ *et un maximum local si* $1+2a<0$. *De plus* $f(h,-1/2) = h^3/4$. *Donc* $(0,-1/2)$ *est un point-selle.*
   L'étude est la même pour les point de la forme $(b,0)$, *avec une séparation en* $b=-1$.
   Pour finir,
   $$\nabla^2 f\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right) = \frac{1}{5^3}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -24 \end{pmatrix}.$$
   Sont déterminant est strictement négatif, donc $(-2/5,-1/5)$ *est un point-selle.*

Exercice 2.

1. *Pour l'indication, on a :*
   $$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 \leq 2(x^4+y^4).$$
   $$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4-2(x-y)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 4xy \\ &\geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) - 4|xy| \\ &\geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^4 - 4\|(x,y)\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\|(x,y)\|^2 - 4\right)^2 - 8 \end{aligned}$$
2. *On a donc montré que* f *est coercive sur le fermé* $\mathbb{R}^2$. *De plus* f *est continue car polynomiale. Ainsi,* f *admet un minimum global.*
3. $$\nabla f(x,y) = 4\begin{pmatrix} x^3-x+y \\ y^3+x-y \end{pmatrix},\ \nabla^2 f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^3-1 \end{pmatrix}.$$
   Points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ *et* $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $(0,0)$ *est un point-selle. Les deux autres sont des minima locaux. De plus, f admet un minimum global et* $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ *donc ces minima sont globaux.*

Exercice 3. *On pose* $g = -\ln f$. *On a*
$$g(m,\sigma) = \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \sum \frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}.$$
Par croissance de $\ln$, *maximiser* f *est équivalent à minimiser* g. *On a*
$$\nabla g(m,\sigma) = \begin{pmatrix} 2\sum \dfrac{m-x_i}{2\sigma^2} \\ \dfrac{n}{\sigma} - 2\sum \dfrac{(m-x_i)^2}{2\sigma^3} \end{pmatrix},\ \nabla^2 g(m,\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & -4\sum \frac{m-x_i}{2\sigma^3} \\ -4\sum \frac{m-x_i}{2\sigma^3} & -\frac{n}{\sigma^2} + 6\sum \frac{(m-x_i)^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

La fonction g admet un unique point critique

$$m^* = \frac{1}{n}\sum x_i,\ \sigma^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum (m^* - x_i)^2\right)^{1/2}.$$

De plus, on a

$$\nabla^2 g(m^*, \sigma^*) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{2n}{{\sigma^*}^2} \end{pmatrix},$$

matrice définie positive. Donc g est minimale en (m^*, σ^*) et f y est maximal.

Exercice 4.

1. *On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j - y_i\right|^2 \\ &= \|Ma - y\|^2\end{aligned}$$

   où $M_{ij} = x_i^j$, $1 \le i \le N$, $0 \le j \le n$.

2. *Remarquons pour commencer que la matrice $M \in \mathcal{M}_{N,n+1}$ est une matrice de Vandermonde dont au moins $n+1$ lignes sont distinctes deux à deux. Elles est donc de rang plein. En particulier, $\ker(M) = \{0\}$ et ${}^tMM$ est inversible. On pose $f : a \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \|Ma - y\|^2$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale et on a*

$$\nabla f(x) = 2{}^tM(Mx - y).$$

   L'unique point critique de f est $x^* = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$. De plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^{n+1}$, en développant, on a

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \|Mh\|^2.$$

   Donc x^* est l'unique minimum de f et c'est un minimum global.

Remarque. Ce résultat a une explication géométrique. Soit $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que Mb soit la projection orthogonal de y sur $V = \{Ma, a \in \mathbb{R}^{n+1}\}$. Dans ce cas, Mb est caractérisé par : $\langle y - Mb, Ma\rangle = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}^{n+1}$. On montre alors que b est unique et caractérisé par : $b = ({}^tMM)^{-1}{}^tMy$. Par ailleurs, le théorème de Pythagore montre alors que pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a : $\|Ma - y\|^2 = \|Mn - y\|^2 + \|M(b - a)\|^2$. Et comme $\ker(M) = \{0\}$, b est l'unique minimum global.

Exercice 5. *La fonction f est continue sur le compacte $\overline{B(0,1)}$. Elle y est donc bornée et y atteint ses bornes. Si $\sup f = \inf f$, alors f est constante sur la boule fermée et donc son gradient est nul. Si $\inf f < \sup f$, alors il existe $x \neq y$ dans $\overline{B(0,1)}$ tels que $f(x) = \inf f$ et $f(y) = \sup f$. f étant constante sur $\mathbb{S}^1$, on peut supposer que $x \in B(0,1)$. Or f est différentiable sur l'ouvert $B(0,1)$ donc $\nabla f(x) = 0$.*
