TD 1. Optimisation sans contraintes

Exercice 1. *Décrivez les points critiques des fonctions suivantes.*

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2(1 + x + 2y)$

Exercice 2. *On considère la fonction f définies sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. *Montrez qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tels que*
$$f(x, y) \geq \alpha \left(\|(x, y)\|^2 + \gamma\right)^2 + \beta,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
(indication. On pourra montrer que $(x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4)$.)
2. *En déduire que f admet un minimum global.*
3. *Trouvez les extrema de f. Que dire du point $(0, 0)$?*

Exercice 3 (Maximum de vraisemblance)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (x, m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[,\ \varphi(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On fixe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose que les x_i ne sont pas tous égaux. Montrez que la fonction

$$f : (m, \sigma) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, m, \sigma)$$

admet un unique maximum local (m^*, σ^*) que l'on précisera. Indication : on pourra passer au logarithme.

Exercice 4 (Régression polynomiale)**.** *On considère le nuage de point $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq N$. On cherche un polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui approche au mieux le nuage au sens des moindre carré i.e on cherche à résoudre*

$$\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \sum_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2.$$

On supposera que $N > n + 1$ et qu'au moins $n + 1$ des x_i sont deux à deux distincts.

1. *Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur de ses coefficients. Montrez que le problème est équivalent au problème de minimisation*
$$\min_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} \|Ma - y\|^2$$
où l'on précisera la matrice M.
2. *Montrez qu'il existe une unique solution à ce problème. (indication : M est de rang plein. Pourquoi ?)*

Exercice 5 (Théorème de Rolle généralisé)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est constante sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$. Montrez qu'il existe x^* dans la boule ouverte $B(0, 1)$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$.*
