Examen final de probabilité

30 Novembre 2023

La durée de l'épreuve est de 1h 30. Une attention toute particulière sera portée à la qualité de la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (Loi sans mémoire)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle sachant B, notée $\mathbb{P}(\cdot|B)$, par : pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

1. *Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Montrer que*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(A|B).$$

2. *Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$. Pour $k, l \in \mathbb{N}$, montrer que*

$$\mathbb{P}(X > k + l | X > k) = \mathbb{P}(X > l). \tag{*}$$

Une loi ayant la propriété (*) est dite sans mémoire. On veut montrer que la loi géométrique est la seule. Soit X un loi discrète à support dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que la loi de X satisfait (*). On définit pour tout $k \geq 1$, $u_k = \mathbb{P}(X > k)$ et on pose $p = 1 - u_1$.

3.a) *Établir la relation de récurrence $u_{k+1} = u_1 u_k$ pour tout $k \geq 1$.*

3.b) *Montrer que $X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Exercice 2 (Durée de vie d'un circuit électrique)**.** *On modélise la durée de vie d'une ampoule électrique par une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.*

1.a) *Calculer la fonction de répartition de X et la tracer.*

1.b) *Montrer que $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$.*

1.c) *Quelle est la dimension physique de λ ? Que dire de la durée de vie de l'ampoule quand λ augmente.*

On considère deux ampoules branchées en série. Le circuit tombe en panne quand la première des deux ampoules tombe en panne. On note X et Y les deux variables aléatoires indépendantes qui modélisent la durée de vie de ces deux ampoules et Z la variable aléatoire qui modélise la durée de vie du circuit. On suppose que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ avec $\lambda, \mu > 0$.

2.a) *Exprimer Z en fonction de X et Y.*

2.b) *Calculer $\mathbb{P}(Z \geq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

2.c) *En déduire la loi de Z.*

Exercice 3 (Une loi peu usuelle). *On pose f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2\sqrt{x}} & si \quad x \geq 1 \\ 0 & si \quad x < 1 \end{cases}$$

1. *Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.*
2. *Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer la fonction de répartition de X. La tracer.*
3. *La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer son espérance.*

Exercice 4 (Pièce défectueuse). *Un industriel souhaite déterminer la proportion, p, de pièces défectueuses fabriquées dans son usine. Pour cela, il prélève aléatoirement n pièces. On modélise cette expérience par n variables aléatoires (X_i), indépendantes, de loi $b(p)$: $X_i = 1$ si la pièce i est défectueuse et $X_i = 0$ si la pièce i est conforme. On note S_n la somme des X_i.*

1. *Quelle est la loi de S_n ? Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.*
2. *Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(indication : quel est le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$?)

3. *Déterminer n tel que $\frac{S_n}{n}$ approche p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%.*