

7. Espaces L^p

Exercice 1 (Variante de l'inégalité de Hölder). Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. Montrer que $fg \in L^r(\mu)$ et :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 2 (Inclusions).

- (i) Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $L^q([0, 1]) \subset L^p([0, 1])$. L'inclusion est-elle stricte ?
- (ii) Donner un exemple de fonction appartenant à tout L^p , mais pas à L^∞ sur \mathbb{R} .
- (iii) Soient $p \neq q$. Montrer que $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables (i.e. ni $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, ni $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$).
- (iv) Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Montrer que $L^p(E) \cap L^q(E) \subset L^r(E)$ si $1 \leq p \leq r \leq q < +\infty$. En déduire que, pour f donnée, l'ensemble $\{p \in [1, +\infty[, f \in L^p(E)\}$ est un intervalle.

Exercice 3 (Espaces de suites). Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$:

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}.$$

Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ si $p \leq q$. L'inclusion est-elle stricte ?

Exercice 4. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(x^{\frac{p-1}{p}}\right)$.

Exercice 5. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace probabilisé et f une fonction positive intégrable. Montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$ alors $\lim_{p \rightarrow 0^+} \|f\|_p = 0$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow 0^+} \int_E f^p d\mu = \mu(\{f > 0\})$.

Exercice 6 (Lemme de Scheffé). Soit (f_n) une suite de fonctions de L^p convergeant p.p. vers $f \in L^p$. Montrer que :

$$\|f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_p \iff \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 7 (Inégalité de Hardy). Soit $p \in]1, +\infty[$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on associe $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que l'inégalité de Hardy ci-dessous est vérifiée pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

Indication : on commencera par vérifier la bonne définition des objets en jeu, puis par montrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$:

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x) F(x)^{p-1} dx.$$

Justifier que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale. Que dire dans les cas $p = 1$ et $p = +\infty$?

Exercice 8. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$. Posons $\tau_a : f \in L^p(\mathbb{R}) \mapsto f(\cdot - a)$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$.