6. Produits de mesures et Changement de variables

Exercice 1. Calculer l'intégrale de Gauss ci-dessous en l'élevant au carré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_\alpha : (x,y) \mapsto \exp(-x^2 - \alpha xy - y^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Notons $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ le graphe de f. Montrer que Γ est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 3 (Un critère d'intégrabilité)**.** Montrer que pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable :

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\,\mathrm{d}t = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Est-ce encore vrai pour toute fonction intégrable ? Montrer que pour tout $p \in]0, +\infty[$:

$$\int_E f^p\,\mathrm{d}\mu = p\int_0^{+\infty} \mu\left(\{f > t\}\right) t^{p-1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 (Application au calcul du volume de la boule unité)**.** On note $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r > 0$ et $V_r(n)$ son volume. On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n :\ e^{-\|x\|^2} > t\})dt\,.$$
3. En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, déduire de la formule ci-dessus que
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = V_1(n)\int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}}\,dt\,.$$
4. En déduire que $V_1(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.
5. Montrer que pour $s > 1$, on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. En déduire par récurrence la valeur de $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, pour tout entier naturel n, puis le volume V_1 de la boule unité :
$$V_1(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si} \quad n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Exercice 5. Étudier l'intégrabilité de f_α sur $\mathbb{R}_+^2$ selon α et calculer son intégrale lorsque c'est possible :

$$f_\alpha : (x,y) \mapsto \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}.$$

Exercice 6. Soient $U =]0,1[^2 \times]-\pi, \pi[$ et φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \mapsto & (u, uv\cos w, v \sin w). \end{array}$$

Montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image et calculer $\lambda_3(\varphi(U))$.

Exercice 7. Soient $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u > v > 0\}$ et $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ v > u > 0\}$. Considérons ψ l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u^2+v^2, 2uv). \end{array}$$

Montrer que ψ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U (resp. V) sur son image que l'on

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4|\, e^{-(u+v)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$