4. Intégrale de Lebesgue

Dans toute la suite, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Exercice 1. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer l'inégalité de Markov :

$$\forall K > 0,\ \mu(\{f \geq K\}) \leq \frac{1}{K} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Qu'en déduit-on lorsque f est intégrable ?

Exercice 2. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ intégrable sur E. Montrer que $\mu\left(\{f \neq 0\}\right) = 0$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Exercice 3. Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que pour tout $u : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\mathbb{N}} u \,\mathrm{d}m = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} a > 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Donner un exemple (espace mesuré et suite de fonctions mesurables) pour lequel l'inégalité de Fatou est stricte.

Exercice 6. Soit $(f_n : E \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions mesurables positives convergeantes μ presque partout vers une fonction f mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Exercice 7. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \mu\left(\{2^n \leq f < 2^{n+1}\}\right) < +\infty.$$

À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha} \mathbb{1}_{x>1}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Supposons μ finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\{f \geq n\}\right) < +\infty.$$

Que dire dans le cas où l'on se passe de l'hypothèse μ finie ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ est presque partout convergente sur $[0, 1]$ (puis presque partout sur $\mathbb{R}$).

Exercice 10 (Lemme de Scheffé)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions positives et intégrables sur E, convergeant presque partout vers f intégrable sur E et vérifiant :

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Montrer que la suite (f_n) converge vers f dans $L^1(E)$. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose plus les fonctions positives ?

Exercice 11. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit intégrable sur E. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant $\int f \,\mathrm{d}\mu > \int g \,\mathrm{d}\mu$. Montrer que $\{f > g\}$ est non vide. Donner un exemple dans lequel cet ensemble est réduit à un singleton.

Exercice 13. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $f : E \to F$ mesurable. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On note $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ la mesure image de μ par f sur $(F, \mathcal{B})$. Montrer qu'une fonction mesurable $g : F \to \mathbb{R}$ est μ_f-intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ-intégrable et que dans ce cas :

$$\int_E g \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_F g \,\mathrm{d}\mu_f.$$

Exercice 14. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ intégrable sur E. Montrer la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

En déduire que, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la primitive suivante de f est uniformément continue :

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Exercice 15. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et 1, dérivable λ-presque partout. Montrer que :

$$\int_0^1 f'(x) \,\mathrm{d}x \leq f(1) - f(0).$$

En s'appuyant sur l'ensemble de Cantor, donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est stricte.