3. Fonctions Mesurables

Exercice 1. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(i) Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

(ii) En déduire que si (f_n) converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.

Exercice 2. Soient f, g deux fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :

$$A = \{f < g\} = \{x \in E, \quad f(x) < g(x)\}, \quad B = \{f \leq g\}, \quad C = \{f = g\}.$$

En déduire que $f + g$ est mesurable.

Exercice 3. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble suivant est un élément de la tribu $\mathcal{A}$:

$$A = \{x \in E, \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}.$$

Exercice 4 (Quelques cas particuliers de fonctions mesurables.)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

(i) Soit $A \subset E$. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Soit (E_k) une partition dénombrable de E qui engendre $\mathcal{A}$. Montrer qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chacun des E_k.

(iii) L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?

Exercice 5. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables entre espaces mesurables $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$.

(i) Soit $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une partition de E. Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \mathbb{1}_{E_n}$ est mesurable.

(ii) Soit $N : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mesurable. Montrer que la fonction suivante est mesurable :

$$g : x \in E \mapsto f_{N(x)}(x).$$

Exercice 6. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone est mesurable. De même pour une application continue par morceaux.

Exercice 7. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

(i) Montrer que, si $\mu(E) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A

(ii) De même, si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors montrer que $|f|$ minorée par une constante strictement positive sur A.

Exercice 8 (Mesure image)**.** Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (F, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\mu_f : B \in \mathcal{B} \mapsto \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

définit une mesure sur $(F, \mathcal{B})$, appelée mesure image de μ par f.

Exercice 9 (Lemme de Doob)**.** Soient X, Y deux applications mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B)/B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : $Y : (E, \sigma(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement s'il existe une application mesurable f de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans lui-même telle que $Y = f \circ X$.
Indication : pour le sens direct, on pourra commencer par étudier les cas où Y est une indicatrice, puis, une fonction étagée.

Exercice 10. Utilise l'ensemble de Cantor pour construire un ensemble non borélien dans la tribu de Lebesque de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.