2. Tribus et Mesures - Suite

Mesure de Lebesgue.

Exercice 1. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle est vide. Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue inférieure ou égale à ε.

Exercice 2. Montrer qu'un borélien $A \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1]\backslash A) = 0$ est dense dans $[0,1]$.

Exercice 3. Déterminer $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle, tels que $A + B = [0,1]$.

Exercice 4 (Mesure invariante par translation)**.** Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mu([0,1]) = 1$ et invariante par translation :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(a+B) = \mu(B).$$

Pour $a < b$, déterminer $\mu(\{a\})$ et $\mu(]a,b[)$.

Exercice 5 (Existence d'ensembles non mesurables)**.** Considérons $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ donnée par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. L'axiome du choix assure l'existence d'un ensemble $A \subset [0,1]$ contenant exactement un élément de chaque classe d'équivalence.

(i) Si $r, q \in \mathbb{Q}$ et $r \neq q$, déterminer $(A+r) \cap (A+q)$.

(ii) Montrer que $[0,1] \subset \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A+r) \subset [-1,2]$.

(iii) Conclure

Exercice 6 (Ensemble de Cantor)**.** Soit $C_0 = [0,1]$. On définit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence : à partir de C_n, union finie d'intervalles fermés disjoints, on obtient C_{n+1} en retirant à chaque intervalle de C_n son tiers médian. On pose ensuite $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(i) Déterminer la mesure de C.

(ii) Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{3^n},\ (\alpha_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}.$$

(iii) Montrer que C est un compact, d'intérieur vide, dont tous les points sont d'accumulation.

($\star$) Quelle est le cardinal de la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, engendrée par les boréliens et les négligeables pour la mesure de Lebesgue ?

Classe monotone.

Exercice 7. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $F : x \mapsto \mu([x, +\infty[)$. Justifier que la mesure μ est entièrement déterminée par la donnée de F. Que dire de l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R},\ \mu(\{x\}) = 0\}$?

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$. Montrer que $f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(f(A)) = |a|\lambda(A)$.