1. Opérations sur les ensembles - Cardinal

Exercice 1. Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right[,\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right],\quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[k-\frac{1}{n},k+\frac{1}{n}\right].$$

Exercice 2. Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{i\geq k}\left\{x\in E,\ |f_i(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}\right\}.$$

Exercice 3. Donner un exemple de suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fermés non vides de $\mathbb{R}$, décroissante pour l'inclusion, telle que $\bigcap_n A_n=\emptyset$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $f : E\to F$ une application.

1. Montrer que pour tout $B\subset F$, on a l'égalité $f^{-1}(B^c)=f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que pour tout $A\subset E$:
   (i) $f(A^c)\subset f(A)^c$,
   (ii) $f(A)^c\subset f(A^c)$.

   Donner un exemple d'application f et d'ensemble A ne satisfaisant aucune des inclusions précédentes.
2. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties de E et F respectivement. Montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i),\qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i),$$
$$f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i),\qquad f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i).$$

   Montrer que la dernière inclusion est une égalité si f est injective.

Exercice 5. Soient E un ensemble et $f:\mathcal{P}(E)\to\mathbb{R}_+$ une application vérifiant $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$ dès que $A\cap B=\emptyset$. Pour toutes parties A et B, montrer que $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de E. Montrer que $(f(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6. Soient X un ensemble, A et B deux parties de X. Indiquer si les fonctions suivantes sont des fonctions indicatrices (et préciser leur ensemble si possible) :

$$\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B,\quad \mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B,\quad \sup\{\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\},\quad \inf\{\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\},\quad \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B,\quad \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B,\quad |\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B|.$$

Exercice 7. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dénombrable.

Pour aller plus loin...

Exercice 8. Déterminer le cardinal de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.
1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.