

2. Tribus et Mesures

Tribus.

Définition 0.1. Soit E un ensemble. Une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu si

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire
- (iii) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments. Donner $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des tribus de E .

Exercice 2. Pour E un ensemble, donner des conditions pour que les classes suivantes soient des tribus :

$$\{\emptyset, E\}, \quad \mathcal{P}(E), \quad \{\emptyset, \{x\}, E\}, \quad \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\} \text{ pour } x \in E, \\ \text{les parties finies de } E, \text{ les parties finies ou cofinies de } E.$$

Exercice 3 (Tribu image réciproque et tribu image). Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tribus sur E et F respectivement.

- (i) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E .
- (ii) Justifier que $f(\mathcal{A})$ n'est en général pas une tribu sur F .
- (iii) Montrer que $\{B, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F .

Mesures.

Définition 0.2. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ si

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) μ est σ -additive : pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints

$$\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

Exercice 4. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in E$. Montrer que la masse de Dirac en a , δ_a , définit bien une mesure.

Exercice 5. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$. Montrer que :

- (i) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.
- (ii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) si $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- (iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante pour l'inclusion, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exercice 7 (Limite inférieure et limite supérieure, pour des suites et des ensembles). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit la limite inférieure et la limite supérieure de (u_n) par

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k.$$

- (i) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k$.

- (ii) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (iii) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (iv) Soit E un ensemble. Soit (A_n) une suite de sous-ensembles de E . Interpréter les ensembles suivants :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- (v) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{et} \quad \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) < +\infty \implies \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Exercice 8 (Borel-Cantelli). Soit E un ensemble. Soit (A_n) une suite de sous-ensembles de E .

- (i) Montrer le premier lemme de Borel-Cantelli :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$

- (★) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Que dire de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{-n}}{|x_n - x|} < +\infty$.

(Indication : on pourra supposer connue une mesure λ qui, à tout segment de $\mathbb{R}$, associe sa longueur.)

Exercice 9. Soit μ une mesure finie sur $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(A_n) = \mu(E)$ pour tout n . Montrer que $\mu(\bigcap A_n) = \mu(E)$. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus la mesure finie ?

Exercice 10 (Mesure régulière). Soit (X, d) un espace métrique. Soit μ une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Montrer que tout borélien A de X vérifie la propriété de régularité suivante :

$$\mu(A) = \inf\{\mu(\Omega), A \subset \Omega, \Omega \text{ ouvert}\} = \sup\{\mu(F), F \subset A, F \text{ fermé}\}.$$

On dit que la mesure μ est régulière. (Ainsi, toute mesure finie sur un espace métrique est régulière.)

Exercice 11 (Suite de mesures). Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (μ_n) une suite de mesures sur $(E, \mathcal{A})$.

- (i) On suppose que : $\forall A \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Montrer que $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ définit une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
- (ii) Trouver une suite de mesures décroissante dont la limite n'est plus une mesure.