

1. Opérations sur les ensembles - Cardinal

Exercice 1. Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n}\right].$$

Exercice 2. Soient f et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{i \geq k} \left\{ x \in E, |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Exercice 3. Donner un exemple de suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fermés non vides de $\mathbb{R}$, décroissante pour l'inclusion, telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que pour tout $B \subset F$, on a l'égalité $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que pour tout $A \subset E$:

- (i) $f(A^c) \subset f(A)^c$,
- (ii) $f(A)^c \subset f(A^c)$.

Donner un exemple d'application f et d'ensemble A ne satisfaisant aucune des inclusions précédentes.

2. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ des familles de parties de E et F respectivement. Montrer que :

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Montrer que la dernière inclusion est une égalité si f est injective.

Exercice 5. Soient E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application vérifiant $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ dès que $A \cap B = \emptyset$. Pour toutes parties A et B , montrer que $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de E . Montrer que $(f(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6. Soient X un ensemble, A et B deux parties de X . Indiquer si les fonctions suivantes sont des fonctions indicatrices (et préciser leur ensemble si possible) :

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B, \quad \sup\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}, \quad \inf\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}, \quad \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|.$$

Exercice 7. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dénombrable.

Pour aller plus loin...

Exercice 8. Déterminer le cardinal de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts. En déduire le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Au sujet de Riemann

Exercice 10. On note f l'indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Soient g, h continues par morceaux sur $[0, 1]$, telles que $g \leq f \leq h$.

1. Montrer que $g \leq 0$ et $h \geq 1$ sauf pour un nombre fini de points.
2. En déduire que f n'est pas intégrable au sens de Riemann.