

TD 2. Correction

Exercice 1 (Directions admissibles). *Pour plus de clarté, on notera $E = \{\lambda(y-x)/y \in K, \lambda > 0\}$. On procède par double inclusion.*

\subset Soit $h \in K(x)$ on dispose d'une suite $(\varepsilon_k)_k > 0$ et d'une suite $(h_k)_k$ de vecteurs telles que $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $h_k \rightarrow h$ et $\forall k, x + \varepsilon_k h_k \in K$. On pose alors $y_k = x + \varepsilon_k h_k \in K$ et $\lambda_k = \varepsilon_k^{-1} > 0$. Pour tout cas on a : $h_k = \lambda_k(y_k - x) \in E$. Par passage à la limite, $h \in \bar{E}$.

\supset Soit $h \in \bar{E}$. On dispose de suites $(y_k) \in K$ et $(\lambda_k)_k > 0$ telles que $h_k := \lambda_k(y_k - x)$ converge vers h . Pour tout k , on a : $y_k = \lambda_k^{-1} h_k + x \in K$ et $x \in K$. Donc

$$\frac{\lambda_k}{k(1 + \lambda_k^2)} y_k + \left(1 - \frac{\lambda_k}{k(1 + \lambda_k^2)}\right) x \in K$$

$$\frac{1}{k(1 + \lambda_k^2)} h_k + x \in K$$

En posant $\varepsilon_k = \frac{1}{k(1 + \lambda_k)}$, on a bien $\varepsilon_k \rightarrow 0$ et $h \in K(x)$.

Exercice 2. 1.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les contraintes sont qualifiées. Soit (x, y, z, λ) , on a :

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + \lambda = 0 \\ x + z + \lambda = 0 \\ x + y + \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 1/3 \\ \lambda = -2/3 \end{cases}$$

Le lagrangien admet un unique point critique.

Par ailleurs, on a $(1, 0, 0) \in K$ et $f(1, 0, 0) = 0$. De plus, pour tout $(x, y, z) \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \geq f(1, 0, 0) &\Leftrightarrow xy + xz + yz \geq 0 \\ &\Leftrightarrow xy + x(1 - x - y) + y(1 - x - y) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq x + y - xy \end{aligned}$$

Or si $|x|, |y| > 2$, alors on a :

$$x + y - xy < x^2/2 + y^2/2 + \frac{x^2 + y^2}{2} = x^2 + y^2.$$

Soit $(x, y, z) \notin [-4, 4]^3$, on peut supposer que $x > 4$. Si $y \geq 2$ alors $f(x, y, z) \leq f(1, 0, 0)$. Si $y < 2$, on a $x + y - xy \leq 3x + 2$ et $x^2 + y^2 \geq x^2$. Ainsi $x + y - xy < x^2 + y^2$ et $f(x, y, z) \leq f(1, 0, 0)$.

Mutatis mutandis, on montre que

$$\{(x, y, z) \in K, f(x, y, z) \geq f(1, 0, 0)\} \subset [-4, 4]^3.$$

La fonction f est continue sur le fermé non-vide K et admet un sur-niveau borné. Donc f admet un maximum global sur K qui est nécessairement l'unique point critique du lagrangien associé au problème : $(1/3, 1/3, 1/3)$.

2.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Le point $(0, 0)$ n'appartenant pas à K , on remarque que les contraintes sont qualifiées. Soit (x, y, λ) , on a :

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda)x = 0 \\ \lambda y = 1/2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

En distinguant les cas selon $x = 0$ ou $x \neq 0$, on obtient alors quatre points critiques : $(0, \pm 1, 1/2)$ et $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2, -1)$, vérifiant

$$f(0, 1) = -1, \quad f(0, -1) = 1, \quad f(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = 5/4.$$

La fonction f est continue sur le compact K . Donc f admet un maximum global et un minimum global sur K , nécessairement points critiques du lagrangien. Ainsi f admet deux maxima globaux en $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ et un minimum global en $(0, 1)$.

Par ailleurs, sur un voisinage U de $(0, -1)$, on peut paramétrer K par

$$U \cap K = \{(t, -\sqrt{1-t^2}), t \in I\},$$

ou I est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R} . On pose $\varphi(t) = f(t, -\sqrt{1-t^2})$. On a

$$\varphi(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

donc φ admet un minimum local en 0. Ainsi, f admet un minimum local en $(0, -1)$.

Exercice 3 (D'un ps à l'autre). 1.

$$\nabla f(x) = 2Ax, \quad \nabla g(x) = 2x.$$

La contrainte est qualifiée car $0 \notin K$. Pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Ax + 2\lambda x = 0 \\ \|x\|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A + \lambda \text{id})x = 0 \\ \|x\|^2 = 1 \end{cases}.$$

La matrice A est symétrique, elle est donc ortho-diagonalisable. En notant, $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ les valeurs propres de A (avec multiplicité) et E_i les espaces propres associés, l'ensemble des points critiques du lagrangien est

$$\{(x, \lambda) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, \exists 1 \leq i \leq p, x \in E_i, \lambda = -\lambda_i\}.$$

La fonction f est continue sur le compact K donc elle admet un maximum et un minimum global sur K . Pour $x \in E_i \cap \mathbb{S}^{n-1}$, on a $f(x) = \lambda_i$. Donc x atteint son minimum global en tout point de $E_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ et son maximum global en tout point de $E_p \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

Par ailleurs, les autres points critiques du lagrangien sont des points-selles pour f . En effet, soit $x \in E_i \cap \mathbb{S}^{n-1}$ avec $2 \leq i \leq p-1$ et notons e_1 et e_n deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_p respectivement. Dans ce cas les fonctions

$$\varphi(t) = f(\sin(t)e_1 + \cos(t)x), \quad \psi(t) = f(\cos(t)x + \sin(t)e_n)$$

vérifient

$$\varphi(t) = \lambda_i + (\lambda_1 - \lambda_i)t^2 + o(t^2), \quad \psi(t) = \lambda_i + (\lambda_n - \lambda_i)t^2 + o(t^2).$$

Donc φ est maximal en 0 et ψ est minimal en 0. Ainsi, x est un point-selle.

2. La contrainte est qualifiée pour la même raison et on obtient l'ensemble de point critique du lagrangien suivant :

$$\left\{ (x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \exists 1 \leq i \leq p, x \in E_i, \|x\|^2 = \frac{1}{\lambda_i}, \mu = -\|x\| \right\}.$$

Par le même argument, f admet un minimum et un maximum global sur K . Ils sont atteints sur $E_p \cap \mathbb{S}(0, \sqrt{\lambda_p^{-1}})$ et $E_1 \cap \mathbb{S}(0, \sqrt{\lambda_1^{-1}})$ respectivement. Les autres points critiques du lagrangien sont des points-selles.

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe). La distance du point (x, y) à l'origine est donnée par $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour simplifier les calculs, on optimise sur la distance au carré. La fonction objectif est donc

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2.$$

La contrainte est elle donnée par la courbe :

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^6 + y^6 - 1.$$

Le domaine admissible $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$ est un compact non-vide. Donc la fonction continue f admet un maximum et un minimum global sur K . On a

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x^5 \\ y^5 \end{pmatrix}.$$

L'origine n'étant pas un point du domaine admissible, la contrainte g est qualifiée en tout point de K . Ainsi, d'après le théorème des extrema liés, si $(x, y) \in K$ est un extremum de f sur K alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0$. Le système associé admet 8 solutions : $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1/\sqrt[6]{2}, \pm 1/\sqrt[6]{2})$ et $(\pm 1/\sqrt[6]{2}, \mp 1/\sqrt[6]{2})$. Les maxima et minima globaux de f sur K sont nécessairement parmi ces points. Par ailleurs, si (x, y) est l'un des quatre premiers, on a $f(x, y) = 1$ et si c'est l'un des quatre derniers, on a $f(x, y) = \sqrt[3]{2}$. Ainsi, les quatre premiers points sont les minimiseurs de f et les quatre autres sont les maximiseurs de f .

Exercice 5 (Inégalité de Minkowski). 1. On suppose que $y = \lambda x$, on a alors $\|x + y\|_p = |1 + \lambda| \|x\|_p$ et $\|x\|_p + \|y\|_p = (1 + |\lambda|) \|x\|_p$, donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. De même si $x = 0$.

2. On pose $f : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \|x + y\|_p^p$, $g_1 : (x, y) \mapsto \|x\|_p^p - \alpha^p$ et $g_2 : (x, y) \mapsto \|y\|_p^p - \beta^p$. L'ensemble admissible $K_{\alpha, \beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0\}$ est ainsi fermé et borné donc compact. Ainsi, f admet un maximum sur $K_{\alpha, \beta}$.

De plus, si $p > 1$ alors, f , g_1 et g_2 sont de classe \mathcal{C}^1 en tout point de K et on a

$$\nabla f(x, y) = p \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)|x_1 + y_1|^{p-2} \\ \dots \\ (x_n + y_n)|x_n + y_n|^{p-2} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x, y) = p \begin{pmatrix} x_1|x_1|^{p-2} \\ \dots \\ x_n|x_n|^{p-2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y) = p \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ y_1|y_1|^{p-2} \\ \dots \\ y_n|y_n|^{p-2} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, si $p = 1$, elles sont g_1 et g_2 sont encore \mathcal{C}^1 sur K et f est de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en les points de la forme $(x, -x)$, points que l'on saura traiter à part. Dans la suite, on négligera cela.

Donc les contraintes sont qualifiées sur K . Soit $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_i + y_i)|x_i + y_i|^{p-2} + \lambda_1 x_i |x_i|^{p-2} = 0 \\ (x_i + y_i)|x_i + y_i|^{p-2} + \lambda_2 y_i |y_i|^{p-2} = 0 \\ \|x\|_p = \alpha, \quad \|y\|_p = \beta \end{cases}$$

On en déduit que pour tout i , $\lambda_1 x_i = \lambda_2 y_i$, i.e x et y sont liés. Ainsi, le maximum de f sur $K_{\alpha, \beta}$ est atteint pour des vecteurs colinéaires.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_p$. Si $\alpha = 0$ (ou $\beta = 0$), alors x et y vérifient l'inégalité. Sinon, il existe $(x^*, y^*) \in K_{\alpha, \beta}$ vérifiant $f(x^*, y^*) = \max_{K_{\alpha, \beta}} f$. En appliquant la question 1) à x^* et y^* colinéaires, on a alors

$$\|x + y\|_p = f(x, y)^{1/p} \leq f(x^*, y^*)^{1/p} = \|x^* + y^*\|_p \leq \|x^*\| + \|y^*\| = \alpha + \beta = \|x\|_p + \|y\|_p.$$
