Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2020

TD
Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 3 - Calcul différentiel

Exercice 1.1.16. Montrer que les concepts “ouvert”, “fermé”, “borné”, “compact” pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ ne dépendent pas de la norme choisie.

Exercice 1.1.17. Soit $(E, \| \ . \ \|)$ un espace vectoriel normé. Prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :

a) L'ensemble vide est compact.
b) Un singleton est compact.
c) Un ensemble fini est compact (on pourra commencer par un ensemble à deux éléments).
d) Un ensemble dénombrable est compact.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des compacts de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x,y),\ 2x^2 + 3y^2 < 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y),\ 0 \leq x, y \ \text{ et } \ xy \leq 1\}.$$

Pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, prouver chacune des affirmations suivantes, ou en donner un contre-exemple :

a) Une intersection d'ensembles compacts est compacte.
b) Un ensemble compact est fermé.
c) Un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.
d) Une union finie d'ensembles compacts est compacte (on pourra commencer par deux ensembles compacts).
e) Une union quelconque d'ensembles compacts est compacte.

Exercice 1.2.1. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}.$$

Exercice 1.2.2. Etudier l'éventuelle continuité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 1.2.5. Soit $f(x, y) = \max(e^x \sin(\mathrm{Arctan}(y)), \ln(1 + x^2 + y^4))$. Montrer que f admet un maximum sur l'ensemble $A = \{(x, y),\ x^{16} + y^{16} = 64\}$ (n'essayez-pas de le calculer !). Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Donnez-le sans calculs (ou presque) !

Exercice 1.2.13. Chacune des fonctions suivantes est-elle différentiable (ou Fréchet-différentiable) sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$? Calculer sa différentielle (de Fréchet) $D_f(a)$ en tout point a de l'ouvert où elle est différentiable.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y, z) = (x^2 z - 2xy, z^3 + xyz)$.

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y) = (y \sin(x), \cos(x))$.

Exercice 1.2.14. Considérons les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sont-elles partiellement différentiables ? (Fréchet-)différentiables ? ou bien même de classes C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_4(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)(e^y-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y+xy^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$