

Equations différentielles et calcul différentiel

Devoir Maison

Le devoir maison est à rendre en séance de TD. Il peut être fait seul ou en petit groupe. Vous pouvez le rendre exercice par exercice à différents moments. Essayez de rédiger comme vous souhaiteriez rédiger en examen.

Exercice 1 (Équations différentielles linéaires et non linéaires de degré 1).

Résoudre les équations différentielles

1. $t \ln(t) x' = x$,
2. $x' = \cos(t)(1 + x(t)^2)$.

Exercice 2 (Equation différentielles linéaires à coefficient constants). Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 4x' + 3x = 0$
2. $x^{(3)} - 3x'' + 4x = 0$
3. $y'' + \omega_0^2 y = c \sin(\omega_1 t)$ (où $\omega_0 \neq \omega_1$).

Exercice 3 (Équations différentielles linéaires matricielles).

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

avec pour conditions initiales $x(0) = 3$ et $y(0) = -1$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

3. Résoudre l'équation différentielle

$$X' = \begin{pmatrix} 1 + 2t^2 & 0 & 1 - t^2 \\ t^2 - 1 & 3t^2 & t^2 - 1 \\ 2 - 2t^2 & 0 & 2 + t^2 \end{pmatrix} X$$

où X va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Une étude qualitative).

On considère le problème

$$x(0) = 0, \quad x'(t) = \frac{1}{1 + t x(t)}$$

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (I, x) .
2. Montrer que x est croissante sur I .
3. Montrer que $I = \mathbb{R}$.
4. Montrer que x est impaire.
5. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x(t)$.