Université de Bordeaux
Master 1, MSS.

Chaîne de Markov
indications feuille 3

Exercice 1.

1. Il y a trois classes : deux récurrente et une transiente. Toutes sont apériodiques car...

2/3. Il faut écrire $\mu P = \mu$. On obtient montre alors que les proba invariantes sont combinaisons convexes de $(1/2, 0, 0, 0, 1/2)$ et $(0, 0, 1, 0, 0)$ (les proba invariantes des classes récurentes). Aucune ne charge les états transitoires 2 et 4.

Exercice 2 (exo théorique)**.**

1. Il faut montrer qu'un état transient n'est pas chargé par les mesures invariantes. Pour cela, on remarque que $\mu = \mu P^n$, $\forall n$, $P^n_{x,y} = 0$ si x est récurrent et y transitoire et $P^n_{x,y} \to 0$ si x et y sont transitoires.
2. même genre d'astuce. On écrit $\mu = \mu P$ et on sépare les états de F et ceux de A.
3. si $z \in A$ conduit à $x \in F$ en un coup, alors $P_{zx} > 0$ et donc $\sum_{y \in A} P_{yz} < 1$.
4. si z conduit à z', alors il existe n $P^n_{zz'} > 0$. Or $\mu = \mu P^n$.
5. on procède par récurrence.

Exercice 3.

1. la chaîne est irréductible apériodique.
2. On écrit $\mu = \mu P$... On trouve $(3/10, 2/5, 1/5, 1/10)$.
3. Théorème ergodique
4. $\mathcal{L}(X_n) \to \mu$ car...

Exercice 4.

1. $a + b = 1$.

2. chaine irréductible. apériodique si $b > 0$ et de période 3 sinon.
3. $\mu = \frac{1}{6+b}(1, \frac{1+b}{4}, \frac{3-b}{4}, \frac{1+b}{2}, 1/2)$
4. théorème ergodique.
5. $\mathbb{E}_1[\tau_1] = \frac{1}{\mu(1)} = \frac{2}{6+b}$. Si $b = 0$ on obtient $1/3$. C'est logique puis que sous $\mathbb{P}_1$ la suite $(X_{3n})_n$ est déterministe.
6. si $b \neq 0$, convergence vers $\mu(5)$. Sinon, $\mathbb{P}_1(X_{3n} = 5) = \mathbb{P}_1(X_{3n+2} = 5) = 0$ et $\mathbb{P}_1(X_{3n+1} = 5) = 1/2$.

Exercice 5 (la diva)**.** On a une chaîne à deux états de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ x & 1-x \end{pmatrix}.$$

Il faut trouver un x convenable pour que les concert soient rentables...