| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019**<br><br>**Devoir surveillé**<br><br>**PARCOURS/ETAPE :** **Code UE : 4TPV102U**<br>**Epreuve : Mathématiques**<br>**Date : Janvier 2019 Durée : 1h30**<br>**Documents : non autorisés** | **Collège Sciences et Technologies** |

**Exercice 1.** *(4pts)*
*Dériver les fonctions suivantes*

$$f(x) = 2\ln(x)\cos(x), \quad g(x) = \arctan(\sqrt{e^x - 1}), \quad h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-1}, \quad k(x) = \arcsin(x+1).$$

**Exercice 2.** *(5pts)*

a) *Déterminer toutes les primitives de* $f(x) = \tan(x)$.

b) *Enoncer la formule d'intégration par parties puis calculer l'intégrale suivante à l'aide de cette méthode :*

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x.$$

c) *A l'aide du changement de variable* $t = \sin(x)$ *calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\mathrm{d}x.$$

**Exercice 3.** *(4pts)*

a) *Donner le développement de Taylor, à l'ordre 2 , en* 0 *de* $f(x) = \ln(1+3x-x^2)$.

b) *Donner le développement de Taylor, à l'ordre 2 , en* 0 *de* $g(x) = (1+2x)^{3/2}$.

c) *En déduire la limite suivante*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+f(x)-g(x)}{x^2}.$$

**Exercice 4.** *(5pts)*

a) *Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes :*

$$1)\, y'(t) + \cos(t)y(t) = 0, \quad 2)\, y'(t) = \sqrt{t}y(t).$$

b) *On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = t\,(E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(i) *Donner l'équation homogène associée à* $(E)$ *puis résoudre cette équation homogène.*

(ii) *Par la méthode de votre choix (variation de la constante ou autre), trouver une solution particulière de* $(E)$. *En déduire l'ensemble des solution de* $(E)$.

(iii) *Donner l'unique solution du problème de Cauchy.*

**Exercice 5.** *(5pts)*

a) *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle*

$$(E_0)\, y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0.$$

b) *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle*

$$(E)\, y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = te^t,$$

*de la forme* $y_p(t) = (at + b)e^t$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *En déduire l'ensemble des solution de* $(E)$.

c) *Déterminer l'unique solution de* $(E)$ *vérifiant la condition initiale* $y(0) = 1, y'(0) = 0$.