TD Équations Différentielles Linéaires

Exercice 1. *Modèles de population - Malthus*
On considère une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$. Dans le modèle de Malthus, on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.

a) On suppose que N est dérivable, montrer que l'on a : $N' = kN$ où k est une constante.

b) Déterminer $N(t)$, pour $t \geq 0$, en sachant qu'à l'instant $t = 0$, la population est de N_0 individus.

c) Comment se comporte cette population quand t tend vers l'infini ?

Exercice 2. *Modèles de population - Verhulst*
Le modèle de Verhulst prend en compte les ressources environnementales finies. Le taux k n'est donc plus supposé constant, mais proportionnel à la différence entre une population maximale, notée N^* et la population à l'instant t : $k(t) = r(N^* - N(t))$. La population est alors solution de l'équation suivante (dite équation logistique) : $N' = r(N^* - N)N$.

a) En supposant que la population ne s'éteint pas, on pose $y = 1/N$. Justifier que y est dérivable et calculer N' en fonction de y et y'.

b) Montrer que y vérifie l'équation (E) : $y' = r(1 - N * y)$.

c) Résoudre l'équation (E).

d) En déduire que l'on a : $N(t) = \frac{N^*}{1+\lambda e^{-rN^*t}}$, où λ est une constante.

e) Comment évolue N au temps long ?

Exercice 3. *Résoudre les équations homogènes et les problèmes de Cauchy suivants :*

$$y'(x) = xy(x),\ y(0) = 1; \qquad y'(x) = \frac{1}{x}y(x),\ y(1) = \pi; \qquad y'(x) = x^2y(x), \quad y(1) = e;$$
$$y'(x) = \frac{1}{x^2}y(x),\ y(2) = 1; \qquad y'(x) = e^x y(x),\ y(0) = e; \qquad y'(x) = \frac{xy(x)}{\sqrt{4-x^2}},\ y(2) = 1;$$
$$y'(x) = \ln(x)y(x),\ y(1) = 1; \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)y(x),\ y(\pi/2) = 1.$$

Exercice 4. *Résoudre les équations différentielles (ou problème de Cauchy) suivants :*

$$y' + 5y = 3,\ y(0) = 0, \qquad y' + 3y = 4e^x,\ y(0) = -2 \quad , \qquad y' + y = xe^{-x} + 1,$$
$$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1. \qquad y' - y = \sin(x) + 2\cos(x). \qquad y' = 3y + \sin(3x),$$
$$y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2}, \qquad y'(x) = x^2(1 - y(x)), \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x),$$
$$xy'(x) + 3y(x) = x^2, \qquad (1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = (1 + x^2)^2.$$

Exercice 5. *Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions et l'unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0, y'(0) = 1$:*

$$y'' + 2y' - 3y = -t + 1, \qquad y'' + 2y' - 3y = e^t, \qquad y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t),$$
$$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}, \qquad y'' - 3y' = 3 + t^2, \qquad y'' + y = t + \sin(t).$$

Exercice 6. *Carbone* 14
Pour les substances radioactives, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atome radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc une solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive donnée.

a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive, le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent. Déterminer une relation entre μ et T.

b) Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans. Que vaut approximativement μ ?

c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 contenu avant l'éruption. De quand date l'éruption, si l'analyse est effectuée en 2018 ?

d) même question avec une analyse plus fine qui donne 42% ?

Exercice 7. *Un certain* 14 *Octobre* 2012
Un parachutiste saute sans vitesse initiale, d'une altitude $z_0 = 40000$ *m. Il se laisse tombé en chute libre pendant* 4 *minutes avant d'ouvrir le parachute. Durant cette phase de chute libre, il est soumis à deux forces : son poids et une force de frottement s'opposant au mouvement. On note* $z(t)$ *son altitude à l'instant* t*. Une application du PFD montre que* z *vérifie l'équation suivante :*

$$\begin{cases} z''(t) = -g - \dfrac{\lambda}{M} z'(t) \\ z(0) = z_0, \ z'(0) = 0. \end{cases}$$

avec $M = 100kg$ *la masse du parachutiste,* $\lambda = 18kg.s^{-1}$ *le coefficient de frottement de l'atmosphère et* $g = 10m.s^{-2}$ *la constante de pesanteur.*

a) *Déterminer l'expression (littérale) de la vitesse et de l'altitude au cours de la chute libre.*
b) *Quelle est l'altitude du parachutiste lorsqu'il ouvre son parachute. Comparer cette vitesse à celle qu'il atteindrait si la chute était infiniment longue.*
c) *Quelles critiques peut-on faire à ce modèle ?*

Exercice 8. *Plage Inc.*
Il existe des épidémies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (comme la tuberculose). On considère deux groupes de personnes : des susceptibles S *et des infectants* I*. Si on suppose aucune phase latente (période durant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors* $S(t)+I(t)$ *est constant et donc* $S'+I' = 0$*. Le changement d'un groupe à l'autre est modélisé par une fonction d'infection,* $f : S' = -f(S,I)$ *et* $I' = f(S,I)$*. On supposera ici que* $f(x,y) = rxy$ *où* $r > 0$ *est une constante. On supposera aussi que la guérison se déroule à un taux* $a > 0$*. On en déduit alors le modèle suivant :*

$$\begin{cases} S'(t) = -rS(t)I(t) + aI(t) \\ I'(t) = rS(t)I(t) - aI(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

1. *On pose* $N = S_0 + I_0$, $u(t) = S(t/a)/N$, $v(t) = I(t/a)/N$ *et* $R = rN/a$ [1]*. Montrer que* u *et* v *vérifient le système suivant :*

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u' = -(Ru-1)v \\ v' = (Ru-1)v \\ u(0) = S_0/N, \quad v(0) = I_0/N \end{cases}$$

2. *Monter que* v *satisfait l'équation logistique* $v' = ((R-1) - Rv)v$.
3. *En utilisant la méthode de l'exercice 25, montrer que* $v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0) exp((1-R)t)}$
4. *Discuter le comportement de la solution quand* t *tend vers l'infini en fonction de* R.

Exercice 9. *Les problèmes suivants sont de la forme* $y' = ay + by^n$*. La méthode de Bernoulli consiste à les réduire à des problèmes linéaires de premier ordre en posant* $z = y^{1-n}$*. Donner l'unique solution de ses système en précisant l'intervalle maximale de définition.*

$$y' = y + y^2, \quad y(0) = 1. \qquad y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3, \quad y(1/2) = \sqrt{e}/2. \qquad y'(x) = xy(x)^2 + \frac{xy(x)}{1+x^2}, \quad y(0) = -3.$$

Exercice 10. *Trouver une solution au problème* $y'' = 2yy'$ *avec les conditions initiales* $y(0) = 0, y'(0) = 1$*. On pourra chercher une fonction* p*, de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $y'(x) = p(y(x))$*.*

1. R désigne le nombre moyen d'infection transmise par un individu pendant une période de maladie