Corrections Équations Différentielles Linéaires

Exercice 1. *Malthus*
C'est l'exemple introductif du cours. La solution est $N_t = N_0 e^{kt}$. *Elle tend vers l'infini en temps long. Cela modélise la croissance d'une population dans un environnement dont les ressources sont infinies.*

Exercice 2. *Verhulst*

a) *Si* N *est dérivable et ne s'annule pas (i.e. pas d'extinction de population) alors* $y = 1/N$ *est dérivable. On a :* $N' = \frac{-y'}{y^2}$.

b) *Il faut remplacer* N' *et* N *par leur expression en fonction de* y' *et* y *dans l'équation de* N : $\frac{-y'}{y^2} = r(N^* - \frac{1}{y})\frac{1}{y}$ *et simplifier...*

c) *C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, donc on obtempère !* $S_E = \{y : t \mapsto \lambda e^{-rN^*t} + 1/\lambda \in \mathbb{R}\}$. *Les questions suivantes ne demandent aucune indication supplémentaire.*

Exercice 3.

$$y : t \mapsto e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad y : x \mapsto \pi x, \qquad y : t \mapsto e^{\frac{t^3+2}{3}}$$

$$y : t \mapsto e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{t}}, \qquad y : t \mapsto e^{e^t}, \qquad y : t \mapsto 2e^{-\sqrt{4-x^2}},$$

$$y : x \mapsto e^{x\ln(x)-x+1}, \qquad y : t \mapsto e^{\frac{\sin^2(t)}{2}}.$$

Exercice 4.

$$y : t \mapsto -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{3}{5}, \qquad y : t \mapsto -3e^{-3t} + e^t,$$

$$S = \left\{y : t \mapsto ce^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t} + 1/c \in \mathbb{R}\right\}, \qquad S = \left\{y : x \mapsto ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{8}(4x^3 - 18x^2 + 78x - 113)/k \in \mathbb{R}\right\},$$

$$S = \left\{y : x \mapsto ce^{x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - 3\cos(x))/c \in \mathbb{R}\right\}, \qquad S = \left\{y : t \mapsto \lambda e^{3t} - \frac{1}{6}(\sin(3t) + \cos(3t))/\lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

$$S = \left\{y : t \mapsto ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}/c \in \mathbb{R}\right\}, \qquad S = \left\{y : t \mapsto ce^{-x^3/3} + 1/c \in \mathbb{R}\right\},$$

$$S = \left\{y : t \mapsto ce^{-\sin(t)} + \sin(t) - 1/c \in \mathbb{R}\right\}, \qquad S = \left\{y : t \mapsto \frac{c}{x^3} + \frac{x^2}{5}/c \in \mathbb{R}\right\},$$

$$S = \left\{y : t \mapsto (t+1)^2(c + \sin(t))/c \in \mathbb{R}\right\}, \qquad S = \left\{y : t \mapsto c(x^2+1) + x^3 + x/c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 5.

$$S = \left\{y : x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^x + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}, \quad \alpha = \frac{-5}{36},\ \beta = \frac{1}{4}$$

$$S = \left\{y : x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^x + \frac{xe^x}{4}/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}, \quad \alpha = \frac{-3}{16},\ \beta = \frac{3}{16}$$

$$S = \left\{y : x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^x + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{xe^x}{4} + \frac{\sin(x)}{10} - \frac{\cos(x)}{5}/\alpha, S\beta \in \mathbb{R}\right\}, \quad \alpha = \frac{-1}{720},\ \beta = \frac{5}{16}$$

$$S = \left\{y : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{3x} + \frac{x^2}{2}e^{3x} + \frac{1}{3}/\alpha, S\beta \in \mathbb{R}\right\}, \quad \alpha = 2,\ \beta = \frac{-1}{3}$$

$$S = \left\{y : x \mapsto \alpha\sin(x) + \beta\cos(x) + x - \frac{x}{2}\cos(x)/\alpha, S\beta \in \mathbb{R}\right\}, \quad \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 0$$

Exercice 6. *Carbone 14*

a) *Le temps* T *est le temps mis pour désintégrer la moitié des atomes, i.e.* T *est défini par :* $Q(T) = Q(0)/2$. *Pour trouver la relation entre* T *et* μ *il faut trouver l'expression de* Q. *Or* Q *est solution d'une EDL d'ordre 1. Donc* $Q(t) = \lambda e^{-\mu t}$ *où* μ *est une constante réelle. On a alors :*

$$\begin{aligned} Q(T) = Q(0)/2 &\Leftrightarrow \lambda e^{-\mu T} = \frac{1}{2}\lambda e^0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\mu T} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \mu T = \ln(2) \end{aligned}$$

b) On obtient $\mu = 1,210.10^{-4} ans^{-1}$. Je laisse ceux qui le souhaite calculer μ dans les unités du système internationale.

c) Le temps 0 correspond à la mort de l'arbre. On a $Q(0) = Q_0$ (quantité inconnue mais inutile). En 2017, l'arbre est mort depuis un temps que l'on note τ : c'est lui que l'on cherche. L'expérience mesure : $Q(\tau) = 0,4Q_0$. Or on sait que $Q(\tau) = Q_0 e^{-\mu * \tau}$. On simplifie et on obtient : $\tau = \frac{\ln(0,4)}{-\mu} = 7,6.10^3$ ans. L'arbre serait donc mort en 5600 av.J.C environ.

d) On a le même calcul : $\tau = \frac{\ln(0,42)}{-\mu} = 7,2.10^3$ ans. Ce qui fait quand même une différence de 400 ans...

Exercice 7. *1/10/12*

a) On a : $z'(t) = \frac{Mg}{\lambda}\left(e^{-\lambda t/M} - 1\right)$ et $z(t) = \frac{M^2 g}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda t/M} - 1\right) - \frac{Mg}{\lambda}t + z_0$.

b) $z'(240) = 55.55 m.s^{-1} = 200 km/h$. C'est la même.

c) En vrai, le coefficient λ n'est pas constant. Il est très faible en haute altitude (atmosphère peu dense donc peu de frottements). C'est ce qui permis à F. Baumgartner de franchir le mur du son sans propulsion.

Exercice 8. *Plague Inc.*

a) Il faut remplacer S', S, I' et I par leur expression en fonction de u', u, v' et v (que l'on aura calculer au préalable). La première équation vient de $I + S = N$.

b) Dans l'équation sur v', on remplace u par $1 - v$ et on simplifie.

c) Comme indiqué, on définit une nouvelle fonction $y = 1/v$. On justifie que y est dérivable et on remplace v' et v dans l'équation logistique par leur expression en fonction de y' et y. On récupère une EDL d'ordre 1, que l'on se dépêche de résoudre !

Exercice 9.

$$y : t \mapsto \frac{e^t}{e^t - 2}, \ \textit{sur }]-\infty, \ln(2)[, \qquad y : t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{e^{2x}(2x-1)+4}}, \ \textit{sur } \mathbb{R},$$

$$y : t \mapsto \frac{-3}{x^2+1}, \ \textit{sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 10.

$$y : x \mapsto \tan(x), \ \textit{sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$