Correction TD Taylor

Exercice 1. *On pose :* $f : x \mapsto \arctan(x)$*. On a alors :*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

On applique alors la formule de Taylor à l'ordre 2 *:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + h^2\varepsilon(x)$$

On en déduit les développements suivants, en $x_0 = 0$ *et en* $x_0 = 1$ *respectivement :*

$$\arctan(x) = x + x^2\varepsilon(x)$$
$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

Notez que le développement en 1 *peut aussi s'écrire ainsi (en remplaçant h par* $x - x_0$*) :*

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$$

Exercice 2. *Le DL à l'ordre 2, au voisinage de 0, de* f *est le suivant :* $f(x) = 2+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$*. On en déduit la tangente à la courbe représentative de* f *et leurs positions relatives.*

Exercice 3. $f(x) = \sin(e^x - 1)$*. On a les développements suivants, au voisinage de* 0 *:*

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$$
$$e^x - 1 = x + x\varepsilon(x)$$

Si x *est proche de* 0*, alors* $X = x + x\varepsilon(x)$ *est proche de* 0*. On a :* $\sin(X) = X + X\varepsilon(X)$*. Ainsi :*

$$\sin(e^x - 1) = x + x\varepsilon(x).$$

De même, on a :

$$\frac{1+3x-2x^2}{(x-1)^2} = 1 + 5x + x\varepsilon(x), \quad \frac{\sin(e^x-1)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x).$$

Exercice 4.

$$e^{\cos(x)} = e + \frac{e}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad \ln(1+x^2) = x^2 + x^2\varepsilon(x),$$
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \qquad \ln(\cos(x)) = \frac{-x}{2} + x^2\varepsilon(x),$$
$$(1+2x)^3 = 1 + 6x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad e^x\cos(x) = 1 + x + x^2\varepsilon(x),$$
$$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Exercice 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = -1.$$

Attention à la dernière limite. On ne peut pas utiliser le développement de sin *en 0 car on regarde la limite en* π*. Il faut donc utiliser la formule de Taylor en* $x_0 = \pi$*.*

Exercice 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}=2,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)-3x}{\ln(1+x)-x}=9,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}=\frac{-3}{8},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x^2}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin(x)}-\frac{1}{x}\right)=0,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{(x-1)^2}=1.$$

Exercice 7. *On pose* $f : x\mapsto\sqrt{1+x}$. *Alors il existe* $0\leq c\leq 0,02$ *tel que l'on ait :*

$$\sqrt{1,02}=f(0,02)=f(0)+0,02f'(0)+\frac{(0,02)^2}{2}f''(c).$$

Or on a : $f(0)+0,02f'(0)=1,01$. *Donc on a :*

$$\sqrt{1,02}-1,01=2.10^{-4}f''(c)$$

Or $f''(x)=\frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$ *et* $0\leq c\leq 0,02$. *Donc on a :* $\frac{-1}{4}\leq f''(c)\leq 0$. *Ainsi, on a :*

$$|\sqrt{1,02}-1,01|\leq 0,5.10^{-4}=5.10^{-5}.$$