

## TD Intégration

**Exercice 1.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^3 dx, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x^4}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad \int_0^\pi \sin(x) dx.$$

**Exercice 2.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \cos(3x - 5), \quad x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{x - 2}.$$

**Exercice 3.** Montrez, en dessinant le graphe de  $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$  sur  $[0, 3]$ , que l'on a :

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}.$$

On pose :

$$A = \int_0^3 (\sqrt{9 - x^2} - 3) dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2} + 3} dx.$$

Calculer  $A$ ,  $A + B$  et  $B$ .

**Exercice 4.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégrations par parties :

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx, \quad \int_0^1 t e^{2t} dt, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad \int_0^1 \sin(u) e^u du, \quad \int_0^1 \arctan(x) dx.$$

**Exercice 5.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x} dx, & \quad \int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 3} dx, & \quad \int_2^3 x \sin(x^2) dx, \\ \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{5 - t^2}} dt, & \quad \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 3} dx, & \quad \int_0^\pi \frac{\sin(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} dv, \\ \int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} dx, & \quad \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx, & \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) dx, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}, & \quad \int_1^2 \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} du. \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Calculer la primitive suivante de trois manières différentes :

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

**Exercice 7.** (Décomposition en éléments simples) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$  distinct de  $-1$  ou  $5$ , on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 5}.$$

En déduire un calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}.$$

**Exercice 8.** Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \ln(t)dt, \quad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx, \quad \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}dx.$$

**Exercice 9.** Soit  $\lambda, T > 0$ . Calculer les intégrales suivantes :

$$I(T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \text{et} \quad E(T) = \int_0^T t \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Déterminer les limites de  $I(T)$  et  $E(T)$  quand  $T$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 10.** ✦ Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ . On pose

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x).$$

Établir une relation de récurrence vérifiée par  $I_n(x)$ , en déduire une relation de récurrence vérifiée par  $J_n$  et calculer  $J_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Exercice 11.** ✦ Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)}, \quad \int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}.$$