**TD Intégration - Correction**

**Exercice 1.**

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}, \quad \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \frac{21}{64}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2, \quad \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}} = 1, \quad \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2.$$

**Exercice 2.**

$$x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x-5) + c \qquad x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x - 3\ln(|x|) - \frac{4}{x^2} + c \qquad x \mapsto \ln(|x-2|) + c.$$

**Exercice 3.** *La fonction $f$ est définie sur $[-3,3]$. Sa courbe représentative est le demi-cercle supérieur de centre $0$ et de rayon $3$. L'intégrale demandée est donc l'air d'un quart de cercle de rayon 3.*

$$A = \frac{9\pi}{4} - 9 \qquad A + B = 0 \qquad B = 9 - \frac{9\pi}{4}.$$

**Exercice 4.**

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \pi, \quad \int_0^1 te^{2t}\mathrm{d}t = \frac{1+e^2}{4}, \quad \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x = e-2,$$

$$\int_0^\pi \sin(u)e^u\mathrm{d}u = \frac{1+e^\pi}{2}, \quad \int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi - \ln(4)}{4}.$$

**Exercice 5.**

$$\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-1} \quad (t=-x), \qquad \int_0^1 e^x\sqrt{e^x+3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left((3+e)^{3/2} - 8\right) \quad (t = e^x)$$

$$\int_2^3 x\sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos(4) - \cos(9) \quad (t = x^2), \qquad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(6) \quad (\frac{u'}{u}), \qquad \int_0^\pi \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2 - 2\cos(\sqrt{\pi}) \quad (t = \sqrt{x})$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\mathrm{d}x = \ln\left(2(2+\sqrt{3})\right) \quad (t = \sin(x)), \qquad \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1) \quad (t = x^3)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad (u' \times u), \qquad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\ln(2) - \sqrt{2} + 4 \quad (x = \sqrt{u} \text{ et IPP}).$$

**Exercice 6.**

1. *c'est de la forme $u' \times u$*
2. *changement de variable $t = \ln(x)$*
3. *IPP $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.*

**Exercice 7.** *On réduit au même dénominateur la fraction et on compare : $a = -\frac{1}{6}$ et $b = \frac{1}{6}$.*

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x-5} = -\frac{\ln(5)}{6}$$

**Exercice 8.**

$$\int \ln(t)\mathrm{d}t = t\ln(t) - t + c \quad (IPP)$$
$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(|x^2+2x+2|\right) + c \quad (\frac{u'}{u})$$
$$\int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + c \quad (t=\sin(x))$$

**Exercice 9.** $I(\lambda) = 1 - e^{-\lambda T}$ *et donc* $\lim_{T\to+\infty} I(\lambda) = 1$.
*Par IPP,* $E(\lambda) = \frac{1+e^{-\lambda T}(\lambda T+1}{\lambda}$ *et donc* $\lim_{T\to+\infty} E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

**Exercice 10.** *Par IPP, on a :* $\forall x, I_n(x) = I_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$. *Par croissance comparée, on a donc :* $J_n = nJ_{n-1}$. *Par récurrence,* $J_n = n!J_0$. *Or* $J_0 = 1$. *Donc* $J_n = n!$ *pour tout* $n \geq 0$.

**Exercice 11.**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

*Le calcul se termine par un changement de variable* $t = \cos(x)$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} = \ln(|\ln(\ln(x))|) + c.$$