Correction TD Dérivation.

Exercice 1.

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0, && g'(x) = 1, && h'(x) = 2x,\\
&f'(x) = \frac{-1}{x^2}, && g'(x) = \frac{-2}{x^3}, && h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\\
&f'(x) = nx^{n-1}, && g'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}, && h'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 42(1+x)^{41}, && g'(x) = \frac{-(1+2x)}{2(x+x^2)^{3/2}}, && h'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\\
&f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}, && g'(x) = \frac{1}{(2+x)^2}, && h'(x) = \frac{-x(x^3+6x-6)}{(x^3+3)^2},\\
&f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}, && g'(x) = 6(5+2x)^2, && h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}(2+x)^{3/2}},\\
&f'(x) = \frac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^3+3x+1}}, && g'(x) = 2\frac{x^2-19x+3}{(x^2-3)^2}, && h'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Exercice 4.

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \sin(x) + (1+x)\cos(x), && g'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), && h'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\\
&f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}, && g'(x) = 2\frac{\arctan(x)}{1+x^2}, && h'(x) = 2xe^x + x^2e^x,\\
&f'(x) = \sin(x)e^x + x\cos(x)e^x + x\sin(x)e^x, && g'(x) = 42\cos(42x), && h'(x) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2},\\
&f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}, && g'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}, && h'(x) = \frac{1}{1+x},\\
&f'(x) = 2\cos(x)\sin(x), && g'(x) = 1, && h'(x) = \frac{1}{2(1+x)},\\
&f'(x) = -2\sin(2x)e^{\cos(2x)}, && g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}, && h'(x) = ae^{ax+b},\\
&f'(x) = e^x\arcsin(x) + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}, && g'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}, && h'(x) = \cos(1+x).
\end{aligned}$$

Exercice 5. *L'idée de cet exercice est d'utiliser la définition de la dérivée (limite du taux d'accroissement) afin de calculer des limites a priori indéterminées.*
La fonction $\sin$ *est dérivable en* 0 *et on a :* $\sin'(0) = \cos(0) = 1$*. De plus on a :*

$$1 = \sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}=0,\quad x\mapsto \sin(x^2) \textit{ en } x=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2},\quad x\mapsto \sqrt{x+1} \textit{ en } x=0,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)-1}{x-1}=-\pi,\quad x\mapsto \sin(\pi x) \textit{ en } x=1$$

Exercice 6.

$$\begin{aligned} u_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\ &= e^{\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)} \\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

On pose $x=1/n$, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

De la même manière que dans l'exercice précédent on peut calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

c'est la dérivée de $x\mapsto \ln(1+x)$ en 0. La fonction exponentielle étant continue, on a :

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

Exercice 7. *La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Sa dérivée est nulle. La fonction f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. En calculant $f(-1)$ et $f(1)$ (ou en calculant les limites en $\pm\infty$) on obtient :*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \textit{si } x>0 \\ \frac{-\pi}{2} & \textit{si } x<0 \end{array}\right.$$